

การทดสอบสำหรับตัวอย่าง 2 ชุด ที่เป็นอิสระกัน

208348 : สถิตินอนพารามेटริก

โดย... ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่



Outline

- K independent samples
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การขยายของการทดสอบมัธยฐาน (The Extension of Median test)
- การทดสอบของครัสคาล-วัลลิส (Kruskal-Wallis test)

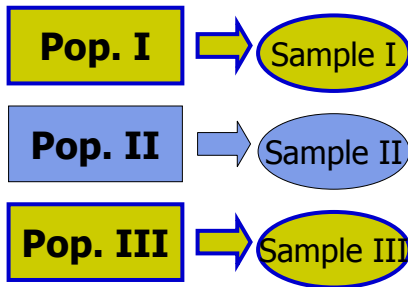


ตัวอย่าง k ชุดที่เป็นอิสระกัน (k independent samples)



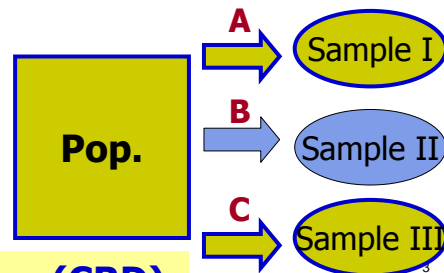
• วิธีในการจัดตัวอย่าง 3 ชุดที่เป็นอิสระกัน

- เลือกตัวอย่างจากประชากร 3 กลุ่ม



- เลือกตัวอย่างจากประชากรเดียวกัน แล้วกำหนด

กลุ่ม 1 ได้รับทริทเมนต์ A,
กลุ่ม 2 ได้รับทริทเมนต์ B
กลุ่ม 3 ได้รับทริทเมนต์ C



แผนการทดลองแบบสุ่มตลอด (CRD)

k independent samples



- ข้อมูล ที่ได้จากแผนการทดลอง CRD

เมื่อใช้ทริทเมนต์ k กลุ่ม ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม n_k หน่วย

		ทริทเมนต์			
		1	2	...	k
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1k}	
	X_{21}	X_{22}	...	X_{2k}	
	
	$X_{n_1 1}$	$X_{n_1 2}$...	$X_{n_1 k}$	

4

สถิติพารามетริกทดสอบความแตกต่าง



- **k independent samples**

- One-way ANOVA test

- **ข้อตกลงเบื้องต้น (assumption)**

- ข้อมูลต้องเป็นข้อมูลปริมาณ
- ข้อมูลแต่ละกลุ่มต้องมีการแจกแจงปกติ
- ความแปรปรวนแต่ละกลุ่มเท่ากัน
- เมื่อลักษณะข้อมูลที่ศึกษาไม่เป็นไปตาม assumption ควรใช้ **สถิตินอนพารามetric** เพื่อทดสอบความแตกต่าง

5

Outline



- K independent samples
- **การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)**
- การขยายของการทดสอบมัธยฐาน (The Extension of Median test)
- การทดสอบของครัสคาล-วัลลิส (Kruskal-Wallis test)

6

การทดสอบแบบไคสแควร์ (Chi-square test)



- เป็นการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปร 2 ตัว
- สามารถประยุกต์ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างค่าสัดส่วน k ชุด
- ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดนามบัญญัติ หรือเรียงลำดับ
- **ข้อมูล**

	-	0	+	
ชุด1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	r_1
ชุด2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	r_2
ชุด3	O_{31}	O_{32}	O_{33}	r_3
	c_1	c_2	c_3	N

O_{ij} = ความถี่สังเกตได้
(observed freq.)

7

Chi-square test



- **สมมติฐานทางสถิติ**
 H_0 : สัดส่วนเหตุการณ์ที่สนใจแต่ละกลุ่มไม่แตกต่างกัน
 H_1 : สัดส่วนแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน

- **สถิติทดสอบ**

$$T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}, \quad \nu = (r-1)(c-1)$$

เมื่อ $E_{ij} = (r_i \times c_j)/n$, r = จำนวนแถว, c = จำนวนคอลัมน์

- **เขตวิกฤต** ที่ระดับนัยสำคัญ α

$$T > \chi^2_{1-\alpha}$$

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

8

Outline



- K independent samples
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การขยายของการทดสอบมัธยฐาน
(The Extension of Median test)
- การทดสอบของครัสคาล-วัลลิส (Kruskal-Wallis test)

9

การขยายของการทดสอบมัธยฐาน (The Extension of Median test)



- สามารถประยุกต์ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่ามัธยฐาน k กลุ่ม
- ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดเรียงลำดับ อันตรภาค หรือ อัตราส่วน
- **ข้อมูล**
 - k independent samples

กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	...	กลุ่ม k
X_{11}, \dots, X_{n_1}	X_{12}, \dots, X_{n_2}	X_{1k}, \dots, X_{n_k}

10

The Extension of Median test



• ข้อมูล (ต่อ)

- การเตรียมข้อมูล
 - คำนวณค่า combined median (med_c) ของข้อมูลทั้งหมด
 - สร้างตารางการจรรยา

	ชุด 1	ชุด 2	...	ชุด k	รวม
$> med_c$	O_{11}	O_{12}	...	O_{1k}	a
$\leq med_c$	O_{21}	O_{22}	...	O_{2k}	b
รวม	n_1	n_2	...	n_k	N

O_{ij} = ความถี่สังเกตได้ของกลุ่ม i ในชุด j

11

The Extension of Median test



• Assumptions

- ตัวอย่างแต่ละชุดเป็นตัวอย่างสุ่ม
- ตัวอย่างแต่ละชุดมีความเป็นอิสระกัน
- มาตรการที่ใช้อย่างน้อยต้องเป็นมาตรเรียงลำดับ
- ถ้าประชากรทุกชุดมีค่ามัธยฐานเดียวกันแล้ว ทุกประชากรจะมีความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตจะมีค่ามากกว่ามัธยฐานเท่ากัน

12

The Extension of Median test



- สมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ค่ามัธยฐานทั้ง k ชุดเท่ากัน

H_1 : ค่ามัธยฐานทั้ง k ชุดไม่เท่ากัน

- สถิติทดสอบ

$$T = \frac{N^2}{ab} \sum_{i=1}^k \frac{(O_{i1} - \frac{n_i a}{N})^2}{n_i} = \left[\frac{N^2}{ab} \sum \frac{O_{i1}^2}{n_i} \right] - \frac{Na}{b}$$

- ถ้าค่า a และ b มีขนาดเท่ากันหรือใกล้เคียง

$$T = \frac{N^2}{ab} \sum_{i=1}^k \frac{(O_{i1} - E_{i2})^2}{n_i} \quad \text{เมื่อ} \quad E_{i2} = \frac{n_i \cdot b}{N}$$

13

The Extension of Median test



- เขตวิกฤต ที่ระดับนัยสำคัญ α

$$T > \chi^2_{1-\alpha} \quad \text{ที่} \quad df = k - 1$$

- การตัดสินใจ

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

14

ตัวอย่าง 5.1



มีวิธีการปลูกข้าว 4 วิธี ถูกกำหนดให้กับที่ดินจำนวนมากซึ่งแตกต่างกันและมีอยู่หลายแปลง และได้ผลผลิตต่อไร่ สำหรับแต่ละแปลงดังนี้

วิธีที่ 1 : 83 91 94 89 89 96 91 92 90

วิธีที่ 2 : 91 90 81 83 84 83 88 91 89 84

วิธีที่ 3 : 101 100 91 93 96 95 94

วิธีที่ 4 : 78 82 81 77 79 81 80 81

จงทดสอบดูว่า มีความแตกต่างกันในผลผลิตของการปลูกข้าวด้วยวิธีทั้ง 4 วิธีหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

• พิจารณาลักษณะข้อมูล

- เป็นข้อมูล 4 ชุดที่เป็นอิสระกัน (ทริทเมนต์ = วิธีการปลูกข้าว)
- ข้อมูลอยู่ในมาตรอัตราส่วน
- ต้องการเปรียบเทียบความแตกต่างผลผลิตข้าวทั้ง 4 วิธีแตกต่างกันหรือไม่ ?

• สมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ผลผลิตข้าวจากวิธีการทั้ง 4 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ผลผลิตข้าวจากวิธีการทั้ง 4 แตกต่างกัน

• สถิติทดสอบ

- คำนวณค่า $med_c = (89 + 89)/2 = 89$
- สร้างตารางการจรรยา

$n = 34$ ดังนั้นตำแหน่ง med_c คือ 17.5

77 78 79 80 81 81 81 81 82 83 83 83 84 84 88 89 89 89
90 90 91 94 91 91 91 91 92 93 94 95 96 96 100 101

	วิธี 1	วิธี 2	วิธี 3	วิธี 4	รวม
> มัชยฐานรวม	6	3	7	0	16
≤ มัชยฐานรวม	3	7	0	8	18
รวม	9	10	7	8	34

16

	วิธี 1	วิธี 2	วิธี 3	วิธี 4	รวม
> มัธยมร่วม	6	3	7	0	16
≤ มัธยมร่วม	3	7	0	8	18
รวม	9	10	7	8	34



- สถิติทดสอบ

$$T = \left[\frac{N^2}{ab} \sum \frac{O_{il}^2}{n_i} \right] - \frac{Na}{b}$$

$$= \left[\frac{34^2}{16 \times 18} \left(\frac{6^2}{9} + \frac{3^2}{10} + \frac{7^2}{7} + 0 \right) \right] - \left(\frac{34 \times 16}{18} \right)$$

$$= 17.6$$

17

- สมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ผลผลิตข้าวจากวิธีการทั้ง 4 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ผลผลิตข้าวจากวิธีการทั้ง 4 แตกต่างกัน

- สถิติทดสอบ

$$T = 17.6$$

- เขตวิกฤต $\alpha = .05$

ใช้ตาราง Chi-square ที่ $df = k-1 = 3$

ค่าวิกฤต $\chi^2_{.95, 3} = 7.815$

เขตวิกฤตคือ $\chi^2 > 7.815$

- สรุปผล

จาก T_{cal} ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ
ที่ $\alpha = 0.05$ ผลผลิตข้าวจากทั้ง 4 วิธีแตกต่างกัน

18



Outline



- K independent samples
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การขยายของการทดสอบมัธยฐาน (The Extension of Median test)
- การทดสอบของครัสคาล-วัลลิส (Kruskal-Wallis test)

19

การทดสอบของครัสคาล-วัลลิส (Kruskal-Wallis test)



- ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างข้อมูล k ชุด
- ข้อมูล
 - k independent samples เปรียบเทียบทริทเมนต์ k กลุ่ม
 - เลือกตัวอย่างขนาด N หน่วย แบ่งเป็น k กลุ่ม
 - สุ่มทริทเมนต์ให้หน่วยตัวอย่างในแต่ละกลุ่ม
 - วัดค่าสังเกต แทนด้วย X_{ij}
 - การเตรียมข้อมูล
 - กำหนดอันดับ (Rank) สำหรับค่าข้อมูลทั้งหมด โดย อันดับ 1 = ค่าต่ำสุด, ..., อันดับ N = ค่าสูงสุด หากข้อมูลมีค่า tied ให้ใช้**อันดับเฉลี่ย**
 - คำนวณผลรวมอันดับในแต่ละทริทเมนต์ (R_i)

20

Kruskal-Wallis test



- ข้อมูล (ต่อ)

ทริทเมนต์						
1	2	...	k			
X_{11}	R_{11}	X_{21}	R_{21}	...	X_{k1}	R_{k1}
X_{12}	R_{12}	X_{22}	R_{22}	...	X_{k2}	R_{k2}
...		
X_{1n_1}	R_{1n_1}	X_{2n_2}	R_{2n_2}	...	X_{kn_k}	R_{kn_k}
Total	R_1	R_2	...	R_k		

21

Kruskal-Wallis test



- ตัวอย่างการเตรียมข้อมูล

ทริทเมนต์					
1	2	3			
10	6	9	4	13	10
10	6	10	6	11	8
15	12	14	11	12	9
5	1	7	2	8	3
Total	25	23	30		

สำหรับ ค่า Ties
($X=10$)

ใช้อันดับเฉลี่ย
 $= (5+6+7)/3 = 6$

22

Kruskal-Wallis test



- **ข้อสมมติ**

- ตัวอย่างทุกชุดได้จากการสุ่ม
- ตัวอย่างทุกชุดเป็นอิสระกัน
- มาตรการวัดของข้อมูลอย่างน้อยต้องเป็นมาตราเรียงลำดับ

- **สมมติฐานทางสถิติ**

- H_0 : ค่าเฉลี่ยของประชากร k ชุดมีค่าเท่า ๆ กัน
- H_1 : ค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ตัวมีค่าแตกต่างกัน

23

Kruskal-Wallis test



- **สถิติทดสอบ**

$$T = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(N+1)$$

- **เขตวิกฤต** ที่ระดับนัยสำคัญ α

$$T > \chi^2_{1-\alpha} \quad \text{โดย } df = k - 1$$

- **การตัดสินใจ**

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

24

ตัวอย่าง 5.2

นักวิเคราะห์การตลาดของห้างสรรพสินค้าโรบินสัน ต้องการวิเคราะห์ความแตกต่างของยอดซื้อของลูกค้า (หน่วยเป็น 100 บาท) ด้วยวิธีการซื้อ 3 วิธี คือ ซื้อด้วยเงินสด, โรบินสันเครดิตการ์ด และเครดิตการ์ดของบริษัทอื่น ๆ ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นยอดซื้อของลูกค้าที่สุ่มมา 18 คนดังนี้

เงินสด	โรบินสันเครดิตการ์ด	เครดิตการ์ดอื่น ๆ
5.00	3.00	4.00
1.00	11.50	7.50
2.00	5.00	9.50
6.50	7.00	5.00
4.50	10.00	8.20
1.00	9.40	10.25

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จงทดสอบว่า ยอดการใช้จ่ายของลูกค้าทั้ง 3 วิธีแตกต่างกัน

25

- **พิจารณาลักษณะข้อมูล**
 - เป็นข้อมูล 3 ชุดเป็นอิสระกัน
 - ข้อมูลอยู่ในมาตรอัตราส่วน
 - ทริทเมนต์ 3 ระดับ (ชนิดการจ่ายเงิน)
 - ต้องการทดสอบว่า ยอดการใช้จ่ายของลูกค้าทั้ง 3 แบบแตกต่างกัน หรือไม่

- **สมมติฐานทางสถิติ**

H_0 : ยอดการใช้จ่ายของลูกค้าทั้ง 3 แบบไม่แตกต่างกัน

H_1 : ยอดการใช้จ่ายทั้ง 3 แบบแตกต่างกัน

26



- สถิติทดสอบ

$$T = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(N+1)$$

$$= \left[\frac{12}{18 \times 19} \frac{(30^2 + 71^2 + 70^2)}{6} \right] - 3(19) = 6.3976$$

เงินสด	โรบินสันเครดิตการ์ด	เครดิตการ์ดอื่น ๆ
5.00 8	3.00 4	4.00 5
1.00 1.5	11.50 18	7.50 12
2.00 3	5.00 8	9.50 15
6.50 10	7.00 11	5.00 8
4.50 6	10.00 16	8.20 13
1.00 1.5	9.40 14	10.25 17
30	71	70

27

- สมมติฐานสถิติ

H_0 : ยอดการใช้จ่ายของลูกค้าทั้ง 3 แบบไม่แตกต่างกัน

H_1 : ยอดการใช้จ่ายทั้ง 3 แบบแตกต่างกัน

- สถิติทดสอบ $T_{cal} = 6.3976$

- เขตวิกฤต กำหนด $\alpha = 0.10$

ใช้ตาราง Chi-square ที่ $df = k - 1 = 2$

ดังนั้น $\chi^2_{1-\alpha, 2} = \chi^2_{.90, 2} = 4.6$

เขตวิกฤต คือ $T > 4.6$

- สรุปผลทดสอบ

จาก T_{cal} ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ

ที่ $\alpha = 0.10$ ยอดการใช้จ่ายทั้ง 3 แบบแตกต่างกัน

28

208348 Final Exam



- พฤษหส์บดดีที่ 1 ตุลาคม 2552 เวลา 8.00-11.00 น
- ห้องสอบ **RB5301**
- เนื้อหา
 - ข้อมูล 2 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน
 - ข้อมูล 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน
 - ข้อมูล k ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน
 - ข้อมูล k ชุดที่เป็นอิสระกัน

29

208348 Final Exam



- **ข้อมูล 2 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน**
 - เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัธยฐาน
Sign test, Wilcoxon test, Fisher rand. test
 - ช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างมัธยฐาน
 - เปรียบเทียบค่าสัดส่วน
McNemar's test
 - วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล
Spearman rank corr. coef. , Kendall rank corr. coef.

30

208348 Final Exam



- **ข้อมูล 2 ชุดที่มีเป็นอิสระกัน**

- เปรียบเทียบค่าสัดส่วน
Fisher exact test, Chi-square test
- เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัธยฐาน
Median test, Mann-Whitney test, Fisher rand. test
- เปรียบเทียบความแปรปรวนระหว่างข้อมูล
Mann-Whitney test
- เปรียบเทียบการแจกแจงของข้อมูล
Kolmogorov-Smirnov test, Cramer-von Mises test, Run test

31

208348 Final Exam



- **ข้อมูล k ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน**

- เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่าง k กลุ่ม
 - ค่าสังเกต $X \Rightarrow$ dichotomous variable
Cochran test
 - $X \Rightarrow$ quantitative variable
Friedman test
Durbin test

32

208348 Final Exam



- **ข้อมูล k ชุดที่มีเป็นอิสระกัน**
 - เปรียบเทียบค่าสัดส่วน k กลุ่ม
Chi-square test
 - เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่าง k กลุ่ม
Extention Median test, Kruskal Wallis test