การทดสอบสำหรับตัวอย่าง k ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน

208348 : สถิตินอนพาราเมตริก

โดย ...ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Outline

- K-related samples
- การทดสอบของคอคแครน (Cochran test)
- การทดสอบของฟรีดแมนต์ (Friedman test)
- การทดสอบของเดอร์บิน (Durbin test)

2

ตัวอย่าง k ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน (k related samples)

- 2 วิธีในการเตรียมตัวอย่าง k ชุด ($k \geq 3$) ที่มีความสัมพันธ์กัน
  - Repeated measures design
    ใช้ตัวอย่างเดียววัดค่า k ครั้ง
  - Matched k samples
    เลือกตัวอย่างมา k คู่ที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน
- อาจเรียกว่า แผนการทดลองแบบบล็อกสุ่มสมบูรณ์ (Randomized complete-Block Design, RBD)

3

k related samples

- ตัวอย่าง Matched k samples
  - เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีการสอน 3 วิธี ทำการเลือกนศ. ที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน (อายุ, ชั้นปี, IQ, ...) กลุ่ม (หรือบล็อก) ละ 3 คน เพื่อทดลอง

กลุ่มที่	วิธีการสอน 1	วิธีการสอน 2	วิธีการสอน 3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
...			
r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}

4

สถิติพาราเมตริกทดสอบความแตกต่าง

- k samples independent
  - One-way ANOVA test
- k related samples
  - Two-way ANOVA test

    ข้อตกลงเบื้องต้น (assumption)
    - ข้อมูลต้องเป็นข้อมูลปริมาณ
    - ข้อมูลแต่ละกลุ่มต้องมีการแจกแจงปกติ
    - ความแปรปรวนแต่ละกลุ่มเท่ากัน

เมื่อลักษณะข้อมูลที่ศึกษาไม่เป็นไปตาม assumption ควรใช้ **สถิตินอนพาราเมตริก**เพื่อทดสอบความแตกต่าง

5

Outline

- K-related samples
- **การทดสอบของคอคแครน (Cochran test)**
- การทดสอบของฟรีดแมนต์ (Friedman test)
- การทดสอบของเดอร์บิน (Durbin test)

6

การทดสอบของคอคแครน (Cochran test)

- ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างข้อมูล c ชุด
- **ข้อมูล**
  - c related samples
    - เปรียบเทียบทรีทเมนท์ c กลุ่ม
    - เลือกตัวอย่างขนาด c หน่วย จำนวน r บล็อก
    - สุ่มทรีทเมนท์ให้หน่วยตัวอย่างในแต่ละบล็อก
    - วัดค่าสังเกต แทนด้วย X_{ij} ซึ่งมีค่า 0 หรือ 1

    โดย 0 = ไม่สำเร็จ (Failure)

    1 = สำเร็จ (Success)

7

Cochran test

- **ข้อมูล (ต่อ)**

X_{ij} = 0 หรือ 1

บล็อก	ทรีทเมนท์				
	1	2	…	C	Total
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1c}	R_1
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2c}	R_2
…					…
r	X_{r1}	X_{r2}	…	X_{rc}	R_r
Total	C_1	C_2	…	C_c	N

8

Cochran test

- **ข้อสมมติ**
  - บล็อกถูกเลือกอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีบล็อกที่เป็นไปได้ทั้งหมด
  - ผลลัพธ์ของทรีทเมนท์จะอยู่ในรูปทวิภาค (Dichotomous) คือข้อมูลมาตรนามบัญญัติ 2 กลุ่ม (0 หรือ 1)
- **สมมติฐานทางสถิติ**
  - H_0 : ทรีทเมนท์มีผลกระทบเท่า ๆ กัน
  - H_1 : ทรีทเมนท์มีผลกระทบแตกต่างกัน

9

Cochran test

- **สถิติทดสอบ**

$$T = \frac{c(c-1)\sum_{j=1}^{c}(C_j - \frac{N}{c})^2}{\sum_{i=1}^{r} R_i(c-R_i)} = \frac{c(c-1)\left[\sum_{j=1}^{c} C_j^2 - \frac{N^2}{c}\right]}{cN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2}$$

- **เขตวิกฤต** ที่ระดับนัยสำคัญ α

$T > \chi^2_{1-\alpha}$ โดย df = c – 1

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

10

ตัวอย่าง 4.1

นักกีฬาบาสเกตบอล 3 คน มีความสามารถในการพยากรณ์ผลการแข่งขันบาสเกตบอลของโรงเรียนในจังหวัดเชียงใหม่ จึงสุ่มเลือกการแข่งขันมา 12 ครั้ง และในแต่ละครั้งก็ให้นักกีฬาแต่ละคนพยากรณ์ผลการแข่งขันก่อนที่จะมีการแข่งขัน หลังจากการแข่งขันสิ้นสุดลงผลการพยากรณ์ปรากฏในตารางโดยให้ 1 เป็นการพยากรณ์ที่ถูกต้อง และ 0 เป็นการพยากรณ์ที่ผิดพลาด ดังนี้

	นักกีฬาคนที่			
การแข่งขันที่	1	2	3	รวม
1	1	1	1	3
2	1	1	1	3
3	0	1	0	1
4	1	1	0	2
5	0	0	0	0
6	1	1	1	3

	นักกีฬาคนที่			
การแข่งขันที่	1	2	3	รวม
7	1	1	1	3
8	1	1	0	2
9	0	0	1	1
10	0	1	0	1
11	1	1	1	3
12	1	1	1	3
รวม	8	10	7	25

ให้ทดสอบสมมติฐานว่า นักกีฬามีความสามารถในการพยากรณ์เท่ากันหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

11

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 3 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรนามบัญญัติ (0 = ไม่ถูก, 1 = ถูก)
  - ทรีทเมนท์ 3 ระดับ (นักกีฬา)
  - บล็อก 12 ระดับ (เกมส์แข่งขัน)
  - ต้องการเปรียบเทียบนักกีฬามีความสามารถในการพยากรณ์ผลการแข่งขันเท่ากันหรือไม่
- สมมติฐานทางสถิติ

  H_0 : นักกีฬาทั้ง 3 มีความสามารถเท่ากัน

  H_1 : นักกีฬาทั้ง 3 มีความสามารถไม่เท่ากัน

12

- **สถิติทดสอบ**

$$T = \frac{c(c-1)\left[\sum_{j=1}^{c} c_j^2 - \frac{N^2}{c}\right]}{cN - \sum_{i=1}^{r} R_i^2}$$

$$= \frac{3(3-1)[(8^2 + 10^2 + 7^2) - 25^2/3]}{3(25) - [3^2 + 3^2 + 1^2 + ... + 3^2]}$$

$= 2.8$

การแข่งขันที่	นักกีฬาคนที่ 1	นักกีฬาคนที่ 2	นักกีฬาคนที่ 3	รวม
1	1	1	1	3
2	1	1	1	3
3	0	1	0	1
4	1	1	0	2
5	0	0	0	0
6	1	1	1	3
7	1	1	1	3
8	1	1	0	2
9	0	0	1	1
10	0	1	0	1
11	1	1	1	3
12	1	1	1	3
รวม	8	10	7	25

13

- **สมมติฐานสถิติ**

  H_0 : นักกีฬาทั้ง 3 มีความสามารถเท่ากัน

  H_1 : นักกีฬาทั้ง 3 มีความสามารถไม่เท่ากัน

- **สถิติทดสอบ** $T_{cal} = 2.8$

- **เขตวิกฤต** กำหนด $\alpha = 0.05$

  ใช้ตาราง Chi-square ที่ df = c-1 =2

  ดังนั้น $\chi^2_{1-\alpha,\,2} = \chi^2_{.95,\,2} = 5.99$

  เขตวิกฤต คือ T > 5.99

- **สรุปผลทดสอบ**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง **Accept H_0** นั่นคือ

  ที่ $\alpha = 0.05$ นักกีฬาทั้ง 3 มีความสามารถในการพยากรณ์ผลการแข่งขันเท่ากัน

14

Outline

- K-related samples
- การทดสอบของคอคแครน (Cochran test)
- **การทดสอบของฟรีดแมนต์ (Friedman test)**
- การทดสอบของเดอร์บิน (Durbin test)

15

การทดสอบของฟรีดแมนต์ (Friedman test)

- ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างข้อมูล k ชุด
- **ข้อมูล**
  - k related samples
    - เปรียบเทียบทรีทเมนท์ k กลุ่ม
    - เลือกตัวอย่างขนาด k หน่วย จำนวน b บล็อก
    - สุ่มทรีทเมนท์ให้หน่วยตัวอย่างในแต่ละบล็อก
    - วัดค่าสังเกต แทนด้วย X_{ij}
  - การเตรียมข้อมูล
    - กำหนดอันดับ (Rank) ค่าข้อมูลในแต่ละบล็อก โดย อันดับ 1 = ค่าต่ำสุด, ..., อันดับ k = ค่าสูงสุด หากข้อมูลในแต่ละบล็อกมีค่า tied ให้ใช้**อันดับเฉลี่ย**
    - คำนวณผลรวมอันดับในแต่ละทรีทเมนท์ (R_j)

16

Friedman test

- ข้อมูล (ต่อ)

บล็อก	ทรีทเมนท์			
	1	2	...	K
1	X_{11} R_{11}	X_{12} R_{12}	...	X_{1k} R_{1k}
2	X_{21} R_{21}	X_{22} R_{22}	...	X_{2k} R_{2k}
...				
b	X_{r1} R_{b1}	X_{r2} R_{b2}	...	X_{bk} R_{bk}
Total	R_1	R_2	...	R_k

17

Friedman test

- ตัวอย่างการเตรียมข้อมูล

บล็อก	ทรีทเมนท์		
	1	2	3
1	10 2	9 1	13 3
2	10 1.5	10 1.5	11 3
3	15 3	14 2	12 1
4	5 1	7 2	8 3
Total	7.5	6.5	10

18

Friedman test

- ข้อสมมติ
  - แต่ละบล็อกเป็นอิสระกัน
  - ภายในแต่ละบล็อก ค่าสังเกตสามารถเรียงลำดับจากน้อยไปหามากได้
- สมมติฐานทางสถิติ
  - H_0 : ทรีทเมนท์มีอิทธิพลเท่า ๆ กัน
  - H_1 : ทรีทเมนท์อย่างน้อย 1 ตัวมีอิทธิพลแตกต่างกัน

19

Friedman test

- สถิติทดสอบ

$$T = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right]^2$$

$$= [\frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^{k} R_j^2] - 3b(k+1)$$

- เขตวิกฤต ที่ระดับนัยสำคัญ α

$T > \chi^2_{1-\alpha}$ โดย df = k – 1

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

20

ตัวอย่าง 4.2

เจ้าของบ้าน 12 คน ถูกเลือกมาโดยวิธีสุ่มเพื่อร่วมมือในการทดลองเกี่ยวกับการปลูกไม้ประดับ โดยให้เจ้าของบ้านแต่ละคนเลือกพื้นที่เพาะปลูกที่มีความเหมือนกัน 4 แปลงในลานบ้านของเขา และให้ปลูกหญ้า 4 ชนิด ที่แตกต่างกันในแต่ละแปลง (หญ้าชนิดหนึ่งปลูกใน 1 แปลง) หลังจากนั้นระยะหนึ่งก็ให้เจ้าของบ้านแต่ละคน ให้อันดับความชอบหญ้าแต่ละชนิด โดยพิจารณาจากค่าใช้จ่าย การดูแลรักษาความสวยงาม ความแข็งแรงทนทาน ความชอบของภรรยา และอื่น ๆ ให้อันดับ 1 แทนอันดับที่ชอบน้อยที่สุด และอันดับ 4 แทนอันดับที่ชอบมากที่สุด ได้ผลดังนี้

เจ้าของบ้าน	หญ้าชนิดที่			
	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	3	1	2	4
4	3	1	2	4
5	4	3	1	3
6	3	1	2	4

เจ้าของบ้าน	หญ้าชนิดที่			
	1	2	3	4
7	1	3	2	4
8	2	4	1	3
9	3	1	2	4
10	4	1	3	2
11	4	2	3	1
12	3	1	2	4
รวม	38	22	25	35

ให้ทดสอบสมมติฐานว่า มีหญ้าบางชนิดมีแนวโน้มจะถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น ๆ หรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 4 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรเรียงลำดับ
  - ทรีทเมนท์ 4 ระดับ (ชนิดหญ้า)
  - บล็อก 12 ระดับ (เจ้าของบ้าน)
  - ต้องการเปรียบเทียบหญ้าบางชนิดมีแนวโน้มถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น ๆ หรือไม่
- สมมติฐานทางสถิติ

  H_0 : หญ้าทั้ง 4 ชนิดถูกชอบเท่ากัน

  H_1 : หญ้าบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

- **สถิติทดสอบ**

$$T = [\frac{12}{bk(k+1)}\sum_{j=1}^{k} R_j^2] - 3b(k+1)$$

$$= [\frac{12}{12 \times 4 \times 5}(38^2 + 22^2 + 25^2 + 35^2)] - 3(12 \times 5)$$

$= 8.9$

เจ้าของบ้าน	หญ้าชนิดที่ 1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	3	1	2	4
4	3	1	2	4
5	4	3	1	3
6	3	1	2	4

เจ้าของบ้าน	หญ้าชนิดที่ 1	2	3	4
7	1	3	2	4
8	2	4	1	3
9	3	1	2	4
10	4	1	3	2
11	4	2	3	1
12	3	1	2	4
รวม	38	22	25	35

23

- **สมมติฐานสถิติ**

  H_0 : หญ้าทั้ง 4 ชนิดถูกชอบเท่ากัน

  H_1 : หญ้าบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

- **สถิติทดสอบ** $T_{cal} = 8.9$

- **เขตวิกฤต** กำหนด $\alpha = 0.05$

  ใช้ตาราง Chi-square ที่ df = k - 1 = 3

  ดังนั้น $\chi^2_{1-\alpha, 3} = \chi^2_{.95, 3} = 7.815$

  เขตวิกฤต คือ $T > 7.815$

- **สรุปผลทดสอบ**

  จาก T_{cal} ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ

  ที่ $\alpha = 0.05$ มีหญ้าบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

24

Outline

- K-related samples
- การทดสอบของคอคแครน (Cochran test)
- การทดสอบของฟรีดแมนต์ (Friedman test)
- **การทดสอบของเดอร์บิน (Durbin test)**

25

การทดสอบของเดอร์บิน (Durbin test)

- ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างข้อมูล t ชุด
- ข้อมูลได้จากแผนการทดลองสมดุลย์แบบบล็อกไม่สมบูรณ์ (Balanced incomplete block design)

  มักนำมาใช้ในกรณีที่ทรีทเมนท์ t มีจำนวนมาก
  - Matched t samples

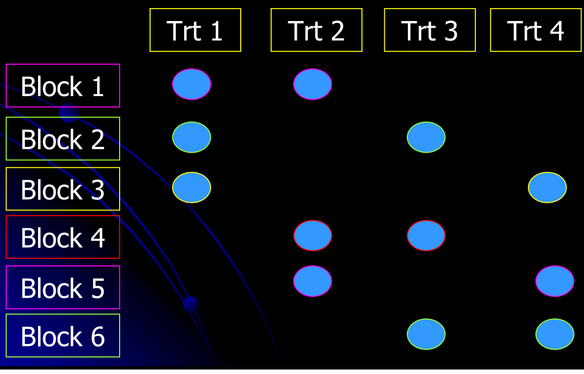
    การหาตัวอย่างขนาด t ในแต่ละบล็อก ทำได้ยาก
  - Repeated measures

    ให้คน ๆ หนึ่งทดลองซ้ำ ๆ กัน t ครั้ง ทำได้ยาก

26

Durbin test

- ข้อมูล
  - แผนการทดลองสมดุลย์แบบบล็อกไม่สมบูรณ์
    - จำนวนตัวอย่างในแต่ละบล็อก = k หน่วย
    - จำนวนทรีทเมนท์ (t) มีมากกว่าจำนวนตัวอย่างในแต่ละบล็อก (k)
    - ทุกทรีทเมนท์จะปรากฏใน r บล็อก
    - ทุกทรีทเมนท์จะปรากฏพร้อมทรีทเมนท์อื่น ๆ ด้วยจำนวนครั้งเท่ากัน (λ)



จำนวนทรีทเมนท์ t = 4

จำนวนบล็อก b = 6

จำนวนหน่วยทดลองในบล็อก k = 2

จำนวนครั้งที่ทรีทเมนท์ปรากฏ r = 3

λ = 1

Durbin test

- ข้อมูล (ต่อ)
  - การเตรียมข้อมูล
    - กำหนดอันดับ (Rank) ค่าข้อมูลในแต่ละบล็อก
      โดย อันดับ 1 = ค่าต่ำสุด, ..., อันดับ k = ค่าสูงสุด
      หากข้อมูลในแต่ละบล็อกมีค่า tied ให้ใช้**อันดับเฉลี่ย**
    - คำนวณผลรวมอันดับในแต่ละทรีทเมนท์ (R_j)

28

Durbin test

- ข้อสมมติ
  - แต่ละบล็อกเป็นอิสระกัน
  - ภายในแต่ละบล็อก ค่าสังเกตสามารถเรียงลำดับจาก น้อยไปหามากได้
- สมมติฐานทางสถิติ
  - H_0 : ทรีทเมนท์มีอิทธิพลเท่า ๆ กัน
  - H_1 : ทรีทเมนท์อย่างน้อย 1 ตัวมีอิทธิพลแตกต่างกัน

Durbin test

- สถิติทดสอบ

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[R_j - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2$$

$$= \left[\frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^{k} R_j^2 \right] - \frac{3r(t-1)(k+1)}{k-1}$$

- เขตวิกฤต ที่ระดับนัยสำคัญ α

$T > \chi^2_{1-\alpha}$ โดย df = k – 1

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ตกอยู่ในเขตวิกฤต

ตัวอย่าง 4.4

สมมติว่าโรงงานไอศกรีมต้องการทดสอบความชอบในรสชาดของไอศกรีมหลาย ๆ ชนิดของหลาย ๆ คน จึงได้ให้แต่ละคนชิมไอศกรีมคนละ 3 ชนิด แล้วให้เรียงอันดับความชอบ เป็น 1, 2 และ 3 โดยให้อันดับ 1 ชอบมากสุด ในการวางแผนการทดลองได้วางแผนให้ไอศกรีมแต่ละชนิดเปรียบเทียบกับชนิดอื่นด้วยจำนวนครั้งที่เท่ากัน ได้ผลอันดับเป็นดังนี้

คนที่	ไอศกรีมชนิดที่						
	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3		1			
2		3	1		2		
3			2	1		3	
4				1	2		3
5	3				1	2	
6		3				1	2
7	3		1				2
รวม	8	9	4	3	5	6	7

ให้ทดสอบสมมติฐานที่ α = .05 ว่าไม่มีไอศกรีมชนิดใดมีแนวโน้มที่จะถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 7 ชุดที่มีความสัมพันธ์กัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรเรียงลำดับ
  - ทรีทเมนท์ t = 7 ระดับ (ชนิดไอศกรีม)
  - บล็อก b = 7 ระดับ (คนชิม)
  - จำนวนครั้งที่ชิมในแต่ละบล็อก k = 3
  - จำนวนครั้งที่ไอศกรีมแต่ละชนิดถูกชิม r = 3
  - λ = 1
  - ต้องการทดสอบว่า ไม่มีไอศกรีมบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น ๆ
- สมมติฐานทางสถิติ

  H_0 : ไอศกรีมทั้ง 7 ชนิดถูกชอบเท่ากัน

  H_1 : ไอศกรีมบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

- **สถิติทดสอบ**

$$T=\left[\frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)}\sum_{j=1}^{k}R_j^2\right]-\frac{3r(t-1)(k+1)}{k-1}$$

$$= \left[\frac{12\text{x}6}{3\text{x}7\text{x}2\text{x}4}(8^2 + 9^2 + \ldots + 7^2)\right] - \frac{3\text{x}3\text{x}6\text{x}4}{2} = 12$$

คนที่	ไอศกรีมชนิดที่ 1	2	3	4	5	6	7
1	2	3		1			
2		3	1		2		
3			2	1		3	
4				1	2		3
5	3				1	2	
6		3				1	2
7	3		1				2
รวม	8	9	4	3	5	6	7

จำนวนทรีทเมนท์ t = 7

จำนวนบล็อก b = 7

จำนวนครั้งที่ชิมในแต่ละบล็อก k = 3

จำนวนครั้งที่ทรีทเมนท์ปรากฏ r = 3

λ = 1

33

- **สมมติฐานสถิติ**

  H_0 : ไอศกรีมทั้ง 7 ชนิดถูกชอบเท่ากัน

  H_1 : ไอศกรีมบางชนิดถูกชอบมากกว่าชนิดอื่น

- **สถิติทดสอบ**

  $T_{cal} = 12$

- **เขตวิกฤต** กำหนด α = 0.05

  ใช้ตาราง Chi-square ที่ df = k - 1 = 6

  ดังนั้น $\chi^2_{1-\alpha,\,6} = \chi^2_{.95,\,6} = 12.59$

  เขตวิกฤต คือ T > 12.59

- **สรุปผลทดสอบ**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง **Accept H_0** นั่นคือ

  ที่ α = 0.05 ไอศกรีมทั้ง 7 ชนิดถูกชอบเท่ากัน

34