การทดสอบสำหรับตัวอย่าง 2 ชุด ที่เป็นอิสระกัน

208348 : สถิตินอนพาราเมตริก

โดย... ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Outline

- Two independent samples
- การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การทดสอบมัธยฐาน (Median test)
- การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)
- การทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test)
- การทดสอบของคาแมร์-ฟอนมิส (Cramer-von Mises test)
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz runs test)
- การทดสอบการสุ่มของฟีชเชอร์ (Fisher randomization test)

2

ปัญหาวิจัย :
เปรียบเทียบความพึงพอใจยาสระผม A กับ B

- **วิธีการศึกษา 1**
  - สุ่มตัวอย่างมา 2 กลุ่มอย่างอิสระ
  - สุ่มเลือกชนิดยาสระผมให้แต่ละกลุ่มทดลองใช้
  - วัดความพึงพอใจของแต่ละกลุ่ม
- **วิธีการศึกษา 2**
  - สุ่มตัวอย่างมา 1 กลุ่ม
  - ให้แต่ละคนทดลองยาสระผมทั้ง 2 ชนิด (โดยสุ่มชนิดก่อน-หลัง)
  - วัดความพึงพอใจของแต่ละคน

ความพึงพอใจ	
ยาสระผม A	ยาสระผม B
$x_1, x_2, \ldots, x_{n1}$	$y_1, y_2, \ldots, y_{n2}$

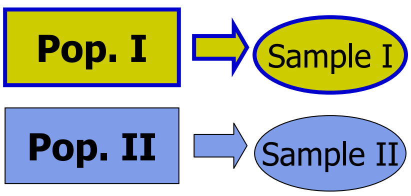
	คนที่	1 2 … n
ความพึงพอใจ	A	x_1 x_2 … x_n
	B	y_1 y_2 … y_n

3

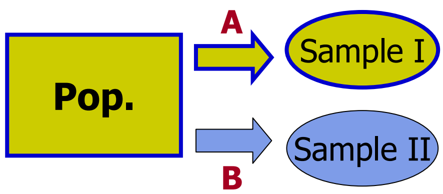
ตัวอย่าง 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน (2 independent samples)

•2 วิธีในการจัดตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน

- เลือกตัวอย่างจากประชากร 2 กลุ่ม



- เลือกตัวอย่างจากประชากรเดียวกัน แล้วกำหนด
  กลุ่ม 1 ได้รับทรีทเมนท์ A,
  กลุ่ม 2 ได้รับทรีทเมนท์ B



4

สถิติพาราเมตริกทดสอบความแตกต่าง

- **2 independent samples**
  - z test
  - t test

    ข้อตกลงเบื้องต้น (assumption)
    - ตัวแปรที่ศึกษาต้องเป็นตัวแปรปริมาณ
    - ตัวแปรต้องมีการแจกแจงปกติ

  เมื่อลักษณะข้อมูลที่ศึกษาไม่เป็นไปตาม assumption ควรใช้ **สถิตินอนพาราเมตริก**เพื่อทดสอบความแตกต่าง

5

Outline

- Two independent samples
- **การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)**
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การทดสอบมัธยฐาน (Median test)
- การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)
- การทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test)
- การทดสอบของคาแมร์-ฟอนมิส (Cramer-von Mises test)
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz runs test)
- การทดสอบการสุ่มของฟิชเชอร์ (Fisher randomization test)

6

การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าสัดส่วน 2 กลุ่ม
  - ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดนามบัญญัติ หรือเรียงลำดับ
  - มีกำลังในการทดสอบสูง ถึงแม้ว่าขนาดตัวอย่างจะน้อย
- **จุดด้อย**
  - การคำนวณค่าตัวสถิติทดสอบมีขั้นตอนยุ่งยาก

7

Fisher exact test

- **Data**
  - 2 independent samples (X_i, Y_i)

    X X_1 X_2 ... X_{n1} โดย X = {-, +}

    Y Y_1 Y_2 ... Y_{n2} Y = {-, +}
  - การเตรียมข้อมูล
    - สร้างตารางการจรณ์

	-	+
X	A	B
Y	C	D

A = ความถี่ที่ X มีค่า –

B = ความถี่ที่ X มีค่า +

C = ความถี่ที Y มีค่า –

D = ความถี่ที Y มีค่า +

8

Fisher exact test

- **Assumptions**
  - ตัวอย่างแต่ละชุดเป็นตัวอย่างสุ่ม
  - ตัวอย่างแต่ละชุดมีความเป็นอิสระกัน
  - ค่าสังเกตแต่ละค่าอาจถูกจัดให้อยู่ในชั้นใดชั้นหนึ่ง ใน 2 ชั้นนั้น

- **Statistical Hypothesis**

$H_0 : P_X(+) = P_Y(+)$

$H_1 : P_X(+) \neq P_Y(+)$

$P_X(+)$ = ความน่าจะเป็นที่ X มีค่า +

$P_Y(+)$ = ความน่าจะเป็นที่ Y มีค่า +

9

Fisher exact test

- **Statistical Test**

p = ความน่าจะเป็นแบบเอ็กแสคท์

= ความน่าจะเป็นที่ปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง ภายใต้ข้อมูลที่สังเกตได้

$$= \frac{\binom{A+C}{A}\binom{B+D}{B}}{\binom{N}{A+B}}$$

	-	+
X	A	B
Y	C	D

$$= \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!}$$

10

Fisher exact test

ตัวอย่าง การคำนวณค่า Exact Prob.

	-	+	รวม
ชุด 1	10	0	10
ชุด 2	4	5	9
รวม	14	5	19

$$p = \frac{10!\,9!\,14!\,5!}{19!\,10!\,0!\,4!\,5!} = 0.0108$$

11

Fisher exact test

ตัวอย่าง การคำนวณค่า Exact Prob.

- **กรณีที่บาง cell ในตารางการจรณ์ ไม่เท่ากับ 0**

	-	+	รวม
ชุด 1	1	6	7
ชุด 2	4	1	5
รวม	5	7	12

$$p = \frac{7!\;5!\;7!\;5!}{12!\;1!\;6!\;4!\;1!}$$

$= 0.04399$

ให้ทำการสร้างตารางปรับค่า cell ที่น้อยที่สุดให้ลดลงทีละ 1 จนกระทั่งเหลือเป็น 0 โดยที่ผลรวมข้างท้ายคงที่

	-	+	รวม
ชุด 1	0	7	7
ชุด 2	5	0	5
รวม	5	7	12

$$p = \frac{7!\;5!\;7!\;5!}{12!\;0!\;7!\;5!\;0!}$$

$= 0.00126$

p = 0.04399 + 0.00126

Fisher exact test

- **การตัดสินใจ ภายใต้ระดับนัยสำคัญ** α

  จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า $p < \alpha$

13

ตัวอย่าง 1

ในการศึกษาบุคคลิกและภูมิหลังทางสังคมของผู้นำนาซี โดยศึกษาประวัติคณะรัฐมนตรีเยอรมัน 15 คน เมื่อปี 1934 โดยแยกเป็นที่สังกัด และไม่สังกัดกลุ่มนาซี กับอาชีพเดิมของคนเหล่านี้ โดยจะทดสอบดูว่าผู้ที่สังกัดกลุ่มนาซีมักจะมาจากคนที่เคยทำงานเกี่ยวข้องกับการเมือง ในขณะที่ผู้ที่ไม่สังกัดกลุ่มนาซีมาจากคนที่เคยประกอบอาชีพอื่น ผลการศึกษาเป็นดังนี้

	อาชีพอื่น	การเมือง	รวม
สังกัดนาซี	1	8	9
ไม่สังกัดนาซี	6	0	6
รวม	7	8	15

จงทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

14

	อาชีพอื่น	การเมือง	รวม
สังกัดนาซี	1	8	9
ไม่สังกัดนาซี	6	0	6
รวม	7	8	15

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรนามบัญญัติ
  - ต้องการทดสอบว่า ผู้ที่สังกัดกลุ่มนาซีมักจะเป็นผู้ที่ทำงานการเมืองมาก่อน ส่วนผู้ที่ไม่สังกัดกลุ่มนาซีจะเคยทำงานอาชีพอื่นที่มั่นคงกว่ามาก่อน

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 :สัดส่วนของผู้เคยทำงานการเมืองจากทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

  H_1 : สัดส่วนของผู้เคยทำงานการเมืองจากทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกัน

or H_0 : $P_{\text{นาซี}}$(การเมือง) = $P_{\text{ไม่สังกัดนาซี}}$ (การเมือง)

H_1 : $P_{\text{นาซี}}$(การเมือง) $\neq$ $P_{\text{ไม่สังกัดนาซี}}$ (การเมือง)

	อาชีพอื่น	การเมือง	รวม
สังกัดนาซี	1	8	9
ไม่สังกัดนาซี	6	0	6
รวม	7	8	15

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 :สัดส่วนของผู้เคยทำงานการเมืองจากทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

  H_1 :สัดส่วนของผู้เคยทำงานการเมืองจากทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกัน

- **สถิติทดสอบ**

$$p = \frac{9!\ 6!\ 7!\ 8!}{15!\ 1!\ 8!\ 6!\ 0!} = 0.001$$

- **สรุปผล** ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

  ค่า $p < 0.05$ จึง **Reject H_0** นั่นคือ

  สัดส่วนของผู้เคยทำงานการเมืองจากทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกัน

Outline

- Two independent samples
- การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)
- **การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)**
- การทดสอบมัธยฐาน (Median test)
- การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)
- การทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test)
- การทดสอบของคาแมร์-ฟอนมิส (Cramer-von Mises test)
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz runs test)
- การทดสอบการสุ่มของฟิชเชอร์ (Fisher randomization test)

17

การทดสอบแบบไคสแควร์ (Chi-square test)

- เป็นการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปร 2 ตัว
- สามารถประยุกต์ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าสัดส่วน 2 กลุ่ม
- ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดนามบัญญัติ หรือเรียงลำดับ

18

Chi-square test

- **Data**
  - 2 independent samples (X_i, Y_i)

X	X_1	X_2	…	X_{n1}	โดย X = {-, +}
Y	Y_1	Y_2	…	Y_{n2}	Y = {-, +}

  - การเตรียมข้อมูล
    - สร้างตารางการจรณ์

	-	+
X	A	B
Y	C	D

A = ความถี่ที่ X มีค่า –

B = ความถี่ที่ X มีค่า +

C = ความถี่ที Y มีค่า –

D = ความถี่ที Y มีค่า +

19

Chi-square test

- **Data**
  - 2 independent samples (X_i, Y_i)

X	X_1	X_2	…	X_{n1}	โดย X = {-, 0, +}
Y	Y_1	Y_2	…	Y_{n2}	Y = {-, 0, +}

  - การเตรียมข้อมูล
    - สร้างตารางการจรณ์

	-	0	+	
X	O_{11}	O_{12}	O_{13}	r_1
Y	O_{21}	O_{22}	O_{23}	r_2
	c_1	c_2	c_3	

O_{ij} = ความถี่สังเกตได้ (observed freq.)

20

Chi-square test

- **Assumptions**
  - ตัวอย่างแต่ละชุดเป็นตัวอย่างสุ่ม
  - ตัวอย่างแต่ละชุดมีความเป็นอิสระกัน
  - ค่าสังเกตแต่ละค่าอาจถูกจัดให้อยู่ในชั้นใดชั้นหนึ่งใน C ชั้นนั้น

21

Chi-square test

- **Statistical Hypothesis**

  $H_0 : P_X(+) = P_Y(+)$

  $H_1 : P_X(+) \neq P_Y(+)$

เมื่อ $P_X(+)$ = ความน่าจะเป็นที่ X มีค่า +

$P_Y(+)$ = ความน่าจะเป็นที่ Y มีค่า +

22

Chi-square test

- **Statistical Test**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}, \quad \upsilon = (r-1)(c-1)$$

เมื่อ $E_{ij} = (r_i \times c_j)/n$ (ต้องมีค่า ≥ 5)

r = จำนวนแถว

c = จำนวนคอลัมน์

กรณีตาราง 2x2 และ n > 20

	-	+
X	A	B
Y	C	D

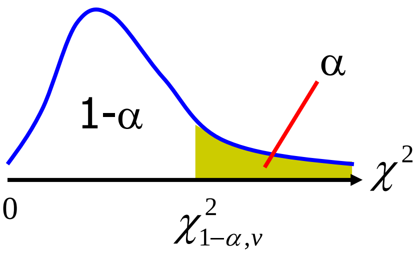
$$\chi^2 = \frac{N(|AD-BC|-\tfrac{1}{2})^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

23

Chi-square test

- **เขตวิกฤต (Critical region)**

ที่ระดับนัยสำคัญ α



เขตวิกฤต คือ

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,v}$$

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า χ^2_c ที่คำนวณได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต

24

Chi-square test

<u>ตัวอย่าง</u> ผลการสอบถามการดื่มแอลกอฮอล์ในผู้ที่สูบบุหรี่ (X) และผู้ที่ไม่สูบบุหรี่ (Y) เป็นดังตาราง

	ไม่ดื่ม	ดื่ม	รวม
X	10 **12**	10 **8**	20
Y	20 **18**	10 **12**	30
รวม	30	20	50

จงวิเคราะห์ข้อมูลที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

- **สมมติฐาน**

  H_0 : P_X(ดื่ม) = P_Y(ดื่ม)

  H_1 : P_X(ดื่ม) $\neq$ P_Y(ดื่ม)

- **สถิติทดสอบ**

  $\chi^2_C = 1.39$

$$\chi_c^2 = \frac{50(|10\times10-10\times20|-\tfrac{1}{2})^2}{(20)(30)(30)(20)} = 1.38$$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$

  $\chi^2 > 3.8$

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0

Outline

- Two independent samples
- การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- **การทดสอบมัธยฐาน (Median test)**
- การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)
- การทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test)
- การทดสอบของคาแมร์-ฟอนมิส (Cramer-von Mises test)
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz runs test)
- การทดสอบการสุ่มของฟิชเชอร์ (Fisher randomization test)

การทดสอบมัธยฐาน (Median test)

- สามารถประยุกต์ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่ามัธยฐาน 2 กลุ่ม
- ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดเรียงลำดับ อันตรภาค หรือ อัตราส่วน

27

Median test

- **Data**
  - 2 independent samples (X_i, Y_i)

X	X_1	X_2	…	X_{n1}
Y	Y_1	Y_2	…	Y_{n2}

  - การเตรียมข้อมูล
    - คำนวณค่า combined median (med_c) ของข้อมูลทั้งหมด
    - สร้างตารางการจรณ์

	$< med_c$	$> med_c$
X	A	B
Y	C	D

A = ความถี่ที่ X มีค่าต่ำกว่า med_c

B = ความถี่ที่ X มีค่ามากกว่า med_c

C = ความถี่ที่ Y มีค่าต่ำกว่า med_c

D = ความถี่ที่ Y มีค่ามากกว่า med_c

Median test

- **Assumptions**
  - ตัวอย่างแต่ละชุดเป็นตัวอย่างสุ่ม
  - ตัวอย่างแต่ละชุดมีความเป็นอิสระกัน
  - มาตรวัดที่ใช้อย่างน้อยต้องเป็นมาตรเรียงลำดับ
  - ถ้าประชากรทั้ง 2 มีค่ามัธยฐานเท่ากันแล้ว จะได้ว่าประชากรทั้ง 2 มีความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตจะมีค่ามากกว่ามัธยฐานร่วมเท่ากัน

29

Median test

- **Statistical Hypothesis**

  H_0 : ค่ามัธยฐานทั้ง 2 ชุดเท่ากัน

  H_1 : ค่ามัธยฐานทั้ง 2 ชุดไม่เท่ากัน
- **Statistical Test**
  - ถ้าขนาดตัวอย่างเล็ก ($n_1 + n_2 < 20$)

    Fisher test
  - ถ้าขนาดตัวอย่างใหญ่

    Chi-square test

30

ตัวอย่าง 2

ในการสอบนักเรียนจาก 2 โรงเรียน ในวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนดังนี้

รร. ที่ 1 : 43 80 99 86 68 70 85 93 98 96 75 81 32 92
91 64 79 97 76 80

รร. ที่ 2 : 76 65 73 95 77 99 55 35 72 83 70 65 86 60
62 90 71 65 89 71 80 76 93 94

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ให้ทดสอบดูว่า มัธยฐานของคะแนนนักเรียนทั้ง 2 โรงเรียนเท่ากันหรือไม่

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรอันตรภาค
  - ต้องการเปรียบเทียบค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มเท่ากันหรือไม่ ?

31

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 :ค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

  H_1 :ค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกัน

- **สถิติทดสอบ**
  - คำนวณค่า med_c = (77 + 79)/2 = 78
  - สร้างตารางการจรณ์

n_1 = 20, n_2 = 24, n = 44 ดังนั้นตำแหน่ง med_c คือ 22.5

32 35 43 55 60 62 64 65 65 65 68 70 70 71 71 72 73 75 76 76 76 77

79 80 80 80 81 83 85 86 86 89 90 91 92 93 93 94 95 96 97 98 99 99

	รร. 1	รร. 2	รวม
> มัธยฐานร่วม	13	9	22
< มัธยฐานร่วม	7	15	22
รวม	20	24	44

32

	รร. 1	รร. 2	รวม
> มัธยฐานร่วม	13	9	22
< มัธยฐานร่วม	7	15	22
รวม	20	24	44

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 :ค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

  H_1 :ค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกัน

$$\chi^2 = \frac{N(|AD - BC| - \frac{1}{2})^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

- **สถิติทดสอบ**

$$\chi^2 = \frac{44(|(13\times15)-(7\times9)|-0.5)^2}{20\times24\times22\times22} = 3.28$$

- **เขตวิกฤต** α = .05

  ค่าวิกฤต $\chi^2_{.95,\,1}$ = 3.84

  เขตวิกฤตคือ χ^2 > 3.84

- **สรุปผล**

  Accept H_0 นั่นคือ

  ค่ามัธยฐานทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

Outline

- Two independent samples
- การทดสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของฟิชเชอร์ (Fisher exact test)
- การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test)
- การทดสอบมัธยฐาน (Median test)
- **การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)**
- การทดสอบของโคโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test)
- การทดสอบของคาแมร์-ฟอนมิส (Cramer-von Mises test)
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz runs test)
- การทดสอบการสุ่มของฟิชเชอร์ (Fisher randomization test)

การทดสอบของแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney test)

- ใช้กับข้อมูลในมาตรวัดเรียงลำดับ อันตรภาค และอัตราส่วน
- ใช้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่ามัธยฐาน

35

Mann-Whitney test

- **ข้อมูล**
  - 2 independent samples (X_i, Y_i)

    X X_1 X_2 ... X_n

    Y Y_1 Y_2 ... Y_m
  - การเตรียมข้อมูลเพื่อใช้ในการวิเคราะห์
    - เรียงข้อมูลทั้งหมดจากน้อย -> มาก
    - กำหนดลำดับค่า (rank) ให้ข้อมูลแต่ละตัว

      - อันดับ 1 แก่ข้อมูลที่มีค่าน้อยสุด

      - อันดับ 2 แก่ข้อมูลที่มีค่าน้อยลำดับถัดมา

      ...

      - อันดับ n + m แก่ข้อมูลที่มีค่ามากที่สุด
    - ให้ R(X) คือค่าอันดับที่ให้แก่ X, R(Y) อันดับของ Y
    - กรณีที่ข้อมูลมีค่า Tied ให้คำนวณอันดับเฉลี่ย

36

Mann-Whitney test

ตัวอย่าง การเตรียมข้อมูล

X	:	12	8	11	13	15	7	18
Y	:	10	15	16	5	19	17	9

เรียงข้อมูล:	5	7	8	9	10	11	12
Rank :	1	2	3	4	5	6	7
R(X) :	-	2	3	-	-	6	7
เรียงข้อมูล:	13	15	15	16	17	18	19
Rank :	8	9.5	9.5	11	12	13	14
R(X) :	8	9.5	-	-	-	13	-

37

Mann-Whitney test

- **ข้อสมมติ**
  - ข้อมูลทั้ง 2 ชุดต้องเป็นอิสระกัน
  - มาตรวัดอย่างน้อยต้องเป็นมาตรเรียงลำดับ

38

Mann-Whitney test

- **สมมติฐานทางสถิติ**
  - **การทดสอบ 2 ทาง (2 tailed test)**

$H_0 : F(X) = G(Y)$ vs. $H_1 : F(X) \neq G(Y)$

หรือ $H_0 : E(X) = E(Y)$ vs. $H_1 : E(X) \neq E(Y)$

หรือ $H_0 : P(X < Y) = 1/2$ vs. $H_1 : P(X < Y) \neq 1/2$

F(X) คือ Distribution function ของ X	E(X) คือ ค่าคาดหวังของ X
G(Y) คือ Distribution function ของ Y	E(Y) คือ ค่าคาดหวังของ Y

39

Mann-Whitney test

- **สมมติฐานทางสถิติ (ต่อ)**
  - **การทดสอบทางเดียวด้านน้อย**

$H_0 : F(X) = G(Y)$ vs. $H_1 : F(X) < G(Y)$

หรือ $H_0 : E(X) = E(Y)$ vs. $H_1 : E(X) < E(Y)$

หรือ $H_0 : P(X < Y) = 1/2$ vs. $H_1 : P(X < Y) < ½$

  - **การทดสอบทางเดียวด้านมาก**

$H_0 : F(X) = G(Y)$ vs. $H_1 : F(X) > G(Y)$

หรือ $H_0 : E(X) = E(Y)$ vs. $H_1 : E(X) > E(Y)$

หรือ $H_0 : P(X < Y) = 1/2$ vs. $H_1 : P(X < Y) > 1/2$

40

Mann-Whitney test

- **ตัวสถิติทดสอบ**

$$\boxed{T = S - [n(n+1)/2]}$$

โดย

S = ผลรวมอันดับของ X = $\sum R(X_i)$

หรืออาจใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$\boxed{T = \sum U_i}$$

โดย

U_i = จำนวน Y ที่มีค่าน้อยกว่า X_i

(หากมีค่า ties ให้นับเป็น 0.5)

41

Mann-Whitney test

ตัวอย่าง การเตรียมข้อมูล

X	:	12	8	11	13	15	7	18
Y	:	10	15	16	5	19	17	9

เรียงข้อมูล:	5	7	8	9	10	11	12
U :	-	1	1	-	-	3	3
เรียงข้อมูล:	13	15	15	16	17	18	19
U :	3	3.5	-	-	-	6	-

$\sum U_i = 20.5$

42

Mann-Whitney test

ตัวอย่าง การเตรียมข้อมูล

X	:	12	8	11	13	15	7	18
Y	:	10	15	16	5	19	17	9

เรียงข้อมูล:	5	7	8	9	10	11	12
Rank :	1	2	3	4	5	6	7
R(X) :	-	2	3	-	-	6	7
เรียงข้อมูล:	13	15	15	16	17	18	19
Rank :	8	9.5	9.5	11	12	13	14
R(X) :	8	9.5	-	-	-	13	-

S = 2+3+…+13 = 48.5 T = 48.5-[7(7+1)/2]=20.5

Mann-Whitney test

- **เขตวิกฤต** ระดับนัยสำคัญ α
  - n = จำนวนตัวอย่างกลุ่ม 1, m = จำนวนตัวอย่างกลุ่ม 2
  - กรณีตัวอย่างขนาดเล็ก (n และ m $\leq$ 20)

    จะหาค่าวิกฤต W_p จากตาราง Mann-Whitney (ตารางที่ 8)

    ส่วน W_{1-p} = nm - W_p
    - การทดสอบทางเดียวด้านขวา

      เขตวิกฤต : $T > W_{1-\alpha}$
    - การทดสอบทางเดียวด้านซ้าย

      เขตวิกฤต : $T < W_{\alpha}$
    - การทดสอบสองทาง

      เขตวิกฤต : $T < W_{\alpha/2}$ หรือ $T > W_{1-\alpha/2}$

44

Table 7 : Quantiles of the Mann-Whitney Test (p. 23-27)

n	p	m= 2	3	4	...	20
	.001	0	0	0	...	0
	.005	0	0	0	...	1
	.01	0	0	0	...	2
2	.025	0	0	0	...	3
	.05	0	0	0	...	5
	.10	0	1	1	...	8
...	...	...	...	...	...	...

ที่ α = .05 สำหรับการทดสอบสองทาง ที่ n = 2, m = 20

$W_{.025}$ = 3 และ $W_{.975}$ = nm – $W_{.025}$ = 40 – 3 = 37

45

Mann-Whitney test

- **เขตวิกฤต** (ต่อ)
  - กรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ (n และ m > 20)

    พบว่า T ~ N(μ_T, σ_T) ดังนั้น

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$ โดย $$\mu_T = \frac{nm}{2}, \sigma_T = \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

- **การทดสอบทางเดียวด้านมาก**

  เขตวิกฤต : T > $W_{1-\alpha}$

  โดย

$$W_{1-\alpha} = \frac{nm}{2} + [Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$$

46

Mann-Whitney test

- **การทดสอบทางเดียวด้านน้อย**

  เขตวิกฤต : $T < W_{\alpha}$

  โดย $$W_{\alpha} = \frac{nm}{2} + [Z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$$

- **การทดสอบสองทาง**

  เขตวิกฤต : $T < W_{\alpha/2}$ หรือ $T > W_{1-\alpha/2}$

  โดย $$W_{\alpha/2} = \frac{nm}{2} - [Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$$

  $$W_{1-\alpha/2} = \frac{nm}{2} + [Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$$

47

Mann-Whitney test

- **การตัดสินใจ**

  จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ที่คำนวณได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต

48

ตัวอย่าง 3

จากการเลือกนักเรียนชั้นมัธยมปลายของโรงเรียนประจำจังหวัดชายแห่งหนึ่งมา 48 คน พบว่า 12 คน อาศัยอยู่ในสวนนอกเมือง และอีก 36 คน เป็นพวกอาศัยอยู่ในเมือง มีผู้อยากทดสอบว่า เด็กนักเรียนที่อาศัยอยู่ในส่วนน่าจะมีความแข็งแรงมากกว่าพวกที่อาศัยอยู่ในเมือง เขาจึงได้นำเด็กแต่ละคนมาทดสอบความแข็งแรง ได้คะแนนเป็นดังนี้

X : นอกเมือง	14.8 7.3 5.6 6.3 9.0 4.2 10.6 12.5 12.9 16.1 11.4 2.7
Y : ในเมือง	12.7 14.2 2.1 17.7 11.8 16.9 7.9 16.0 10.6 5.6 5.6 7.6 11.3 8.3 6.7 3.6 1.0 2.4 6.2 6.1 15.3 10.6 1.8 5.9 9.9 10.6 14.8 5.0 2.6 4.0 3.2 6.4 6.7 9.1 12.6 18.6

จงทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

X : นอกเมือง	14.8 7.3 5.6 6.3 9.0 4.2 10.6 12.5 12.9 16.1 11.4 2.7
Y : ในเมือง	12.7 14.2 2.1 17.7 11.8 16.9 7.9 16.0 10.6 5.6 5.6 7.6 11.3 8.3 6.7 3.6 1.0 2.4 6.2 6.1 15.3 10.6 1.8 5.9 9.9 10.6 14.8 5.0 2.6 4.0 3.2 6.4 6.7 9.1 12.6 18.6

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรอันตรภาค
  - ต้องการทดสอบว่า นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองจะมีความแข็งแรงกว่าผู้ที่อาศัยในเมืองหรือไม่ ?
- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 : นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองไม่แข็งแรงกว่าในเมือง

  H_1 : นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองแข็งแรงกว่าในเมือง

หรือ $H_0: E(X) = E(Y)$ vs $H_1: E(X) > E(Y)$

- **ตัวสถิติทดสอบ**

  $T_{cal} = S - [n(n+1)/2]$

  $= 243$ **[n =12, m=36]**

$S = \sum R(X_i)$

$= 6+10+13+...+45$

$= 321$

เรียงข้อมูล	1.0	1.8	2.1	2.4	2.6	2.7	3.2	3.6	4.0	4.2	5.0	5.6	5.6	5.6
Rank	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	13	13
เรียงข้อมูล	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.7	6.7	7.3	7.6	7.9	8.3	9.0	9.1	9.9
Rank	15	16	17	18	19	20.5	20.5	22	23	24	25	26	27	28

เรียงข้อมูล	10.6	10.6	10.6	10.6	11.3	11.4	11.8	12.5	12.6	12.7	12.9
Rank	30.5	30.5	30.5	30.5	33	34	35	36	37	38	39
เรียงข้อมูล	14.2	14.8	14.8	15.3	16.0	16.1	16.9	17.7	18.6		
Rank	40	41.5	41.5	43	44	45	46	47	48		

51

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 : นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองไม่แข็งแรงกว่าในเมือง

  H_1 : นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองแข็งแรงกว่าในเมือง

- **ตัวสถิติทดสอบ**

  $T_{cal} = 243$ [n = 12, m = 36]

- **เขตวิกฤต** กำหนด $\alpha = 0.05$

  ทดสอบทางเดียวด้านมาก, ขนาดตัวอย่างใหญ่

  ดังนั้น $W_{1-\alpha} = \frac{nm}{2} + [Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$ = 285.1

  จากตาราง Z หาค่า $Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$

  เขตวิกฤต คือ T > 285.1

- **สรุปผล**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง **Accept H_0** นั่นคือ

  ที่ $\alpha = 0.05$ นักเรียนที่อยู่ในสวนนอกเมืองไม่แข็งแรงกว่าในเมือง

ตัวอย่าง 4

ในการทดลองอย่างง่าย ๆ เพื่อดูว่าหินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงเท่ากับหินในพื้นที่ ข หรือไม่ ผู้ทดลองได้เก็บหิน 4 ชิ้นจากพื้นที่ ก และ 5 ชิ้นจากพื้นที่ ข ในการหาว่าหิน 2 ชิ้น ชิ้นไหนจะแข็งแรงกว่ากันนั้นเขาได้เอาหิน 2 ชิ้นถูกัน หินชิ้นไหนถูกทำลายน้อยกว่าจะถือว่ามีความแข็งแรงกว่า ในการทำเช่นนี้เขาก็จะได้อันดับของความแข็งแรงของหินทั้ง 9 ก้อน โดยให้อันดับ 1 แก่หินที่มีความแข็งแรงน้อยที่สุด อันดับ 2 ให้แก่ที่แข็งแรงรองลงมาจนถึงอันดับ 9 คือหินที่แข็งแรงที่สุด

หินจากพื้นที่	ก	ก	ก	ข	ก	ข	ข	ข	ข
อันดับ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

จงทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

53

หินจากพื้นที่	ก	ก	ก	ข	ก	ข	ข	ข	ข
อันดับ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูล 2 ชุดที่เป็นอิสระกัน
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรเรียงลำดับ
  - ต้องการทดสอบว่า หินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงเท่ากับหินในพื้นที่ ข หรือไม่ ?
- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 : หินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงเท่ากับหินในพื้นที่ ข

  H_1 : หินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงไม่เท่ากับหินในพื้นที่ ข

54

- **สมมติฐานทางสถิติ**
  H_0 : หินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงเท่ากับหินในพื้นที่ ข
  H_1 : หินในพื้นที่ ก จะมีความแข็งแรงไม่เท่ากับหินในพื้นที่ ข
- **ตัวสถิติทดสอบ**
  $T_{cal} = 1$ [n = 4, m = 5]

พื้นที่	ก	ก	ก	ข	ก	ข	ข	ข	ข
อันดับ	1	2	3	4	5	6	7	8	9

S = 1+2+3+5 = 11

- **เขตวิกฤต** กำหนด $\alpha = 0.05$
  ทดสอบทางเดียว 2 ทาง, จากตาราง Mann-Whitney
  ดังนั้นหาค่า $W_{\alpha/2} = W_{0.025} = 2$ และ $W_{0.975} = 20-2 = 18$
  เขตวิกฤต คือ T < 2 หรือ T > 18
- **สรุปผล**
  จาก T_{cal} ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ
  ที่ $\alpha = 0.05$ หินใน 2 พื้นที่มีความแข็งแรงไม่เท่ากัน

55

Mann-Whitney test

- สามารถประยุกต์ใช้ทดสอบเปรียบเทียบความแปรปรวน 2 กลุ่ม
- **สมมติฐานทางสถิติ**
  H_0 : Var(X) $\leq$ Var(Y)
  H_1 : Var(X) > Var(Y)

56

Mann-Whitney test

- การเตรียมข้อมูลเพื่อใช้ในการวิเคราะห์
  - เรียงข้อมูลทั้งหมดจากน้อย -> มาก
  - กำหนดลำดับค่า (rank) ให้ข้อมูลแต่ละตัว
    - อันดับ 1 แก่ข้อมูลที่มีค่าน้อยสุด
    - อันดับ 2 แก่ข้อมูลที่มีค่ามากที่สุด
    - อันดับ 3 แก่ข้อมูลที่มีค่ามากรองลงมาอันดับ 1
    - อันดับ 4 แก่ข้อมูลที่มีค่าน้อยลำดับถัดมา 1
    - อันดับ 5 แก่ข้อมูลที่มีค่าน้อยลำดับถัดมา 2

      ...
    - อันดับ n + m แก่ข้อมูลที่มีค่าตรงกลาง

กลุ่ม	ก	ก	ก	ข	ก	ข	ข	ข	ข
คะแนน	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Rank	1	4	5	8	9	7	6	3	2

Mann-Whitney test

- **เขตวิกฤต** ระดับนัยสำคัญ α

  เขตวิกฤต : $T < W_{\alpha}$

กรณีที่ 1

กลุ่ม	ก	ก	ก	ข	ก	ข	ข	ข	ข
คะแนน	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Rank	1	4	5	8	9	7	6	3	2

S = 19

กรณีที่ 2

กลุ่ม	ก	ก	ข	ข	ข	ข	ข	ก	ก
คะแนน	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Rank	1	4	5	8	9	7	6	3	2

S = 10

กรณีที่ 1 หรือ 2 ที่กลุ่ม ก ควรมีค่าความแปรปรวนสูงกว่า

ตัวอย่าง 5

จากตัวอย่างที่ 3 จงทดสอบสมมุติฐานว่า ความแปรปรวนของ X จะมากกว่าของ Y

X : นอกเมือง	14.8 7.3 5.6 6.3 9.0 4.2 10.6 12.5 12.9 16.1 11.4 2.7
Y : ในเมือง	12.7 14.2 2.1 17.7 11.8 16.9 7.9 16.0 10.6 5.6 5.6 7.6 11.3 8.3 6.7 3.6 1.0 2.4 6.2 6.1 15.3 10.6 1.8 5.9 9.9 10.6 14.8 5.0 2.6 4.0 3.2 6.4 6.7 9.1 12.6 18.6

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  $H_0 : V(X) \leq V(Y)$

  $H_1 : V(X) > V(Y)$

- **ตัวสถิติทดสอบ**

  $T_{cal} = S - [n(n+1)/2]$

  $= 238.67$ **[n =12, m=36]**

$S = \sum R(X_i)$

$= 12+20+\ldots+7$

$= 316.67$

เรียงข้อมูล	1.0	1.8	2.1	2.4	2.6	2.7	3.2	3.6	4.0	4.2	5.0	5.6	5.6	5.6
Rank	1	4	5	8	9	12	13	16	17	20	21	25.7	25.7	25.7

เรียงข้อมูล	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.7	6.7	7.3	7.6	7.9	8.3	9.0	9.1	9.9
Rank	29	32	33	36	37	40.5	40.5	44	45	48	47	46	43	42

เรียงข้อมูล	10.6	10.6	10.6	10.6	11.3	11.4	11.8	12.5	12.6	12.7	12.9
Rank	36.5	36.5	36.5	36.5	31	30	27	26	23	22	19

เรียงข้อมูล	14.2	14.8	14.8	15.3	16.0	16.1	16.9	17.7	18.6
Rank	18	14.5	14.5	11	10	7	6	3	2

- **สมมติฐานทางสถิติ**

  H_0 : V(X) $\leq$ V(Y)

  H_1 : V(X) > V(Y)

- **ตัวสถิติทดสอบ**

  T_{cal} = 238.67 [n = 12, m = 36]

- **เขตวิกฤต** กำหนด α = 0.05

  ใช้เขตวิกฤตด้านน้อย, ขนาดตัวอย่างใหญ่

  ดังนั้น $W_{1-\alpha} = \frac{nm}{2} + [Z_{\alpha} . \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}]$ = 146.9

  จากตาราง Z หาค่า Z_{α} = $Z_{0.05}$ = -1.645

  เขตวิกฤต คือ T < 146.9

- **สรุปผล**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง **Accept H_0** นั่นคือ

  ที่ α = 0.05 ความแปรปรวนของ X ไม่มากกว่า Y

61