การทดสอบสำหรับตัวอย่างชุดเดียว (III)

208348 : สถิตินอนพาราเมตริก

โดย ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

เนื้อหา

- การทดสอบซึ่งใช้การแจกแจงทวินามเป็นหลัก
- ขีดจำกัดที่ยอมรับได้
- การทดสอบแบบไคสแควร์
- **การทดสอบซึ่งอาศัยหลักสถิติของโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ**
- การทดสอบซึ่งอาศัยหลักของรันส์

การทดสอบซึ่งอาศัยหลักสถิติของโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ

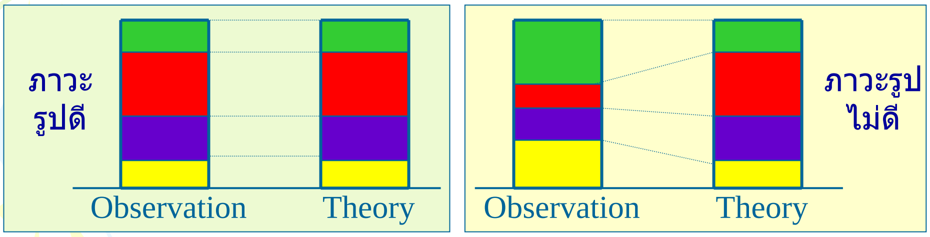
- บทนำ
- การทดสอบภาวะรูปดีของโคลโมโกรอฟ
- แถบความเชื่อมั่นของฟังก์ชันการแจกแจงของประชากร
- การทดสอบของลิลี่โฟร์
- การทดสอบภาวะรูปดีของคราแมร์-ฟอน-มิส

บทนำ

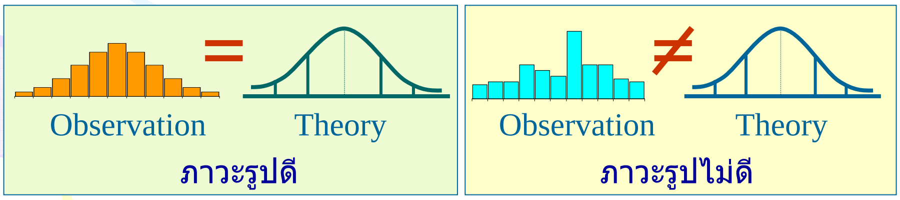
- **เป้าหมายการทดสอบซึ่งอาศัยหลัก Kolmogorov-Smirnov**
  - ทำการทดสอบภาวะรูปดีของข้อมูล
    - สัดส่วนข้อมูลแต่ละกลุ่มเป็นตามที่คาดการณ์ไว้
    - การแจกแจงของข้อมูลเป็นตามที่คาดไว้
  - สามารถใช้วิเคราะห์ข้อมูลที่มีมาตรวัดตั้งแต่มาตรเรียงลำดับ

บทนำ

- **หลักการทดสอบภาวะรูปดี** อยู่ภายใต้ p_i
  - ข้อมูลคุณภาพ



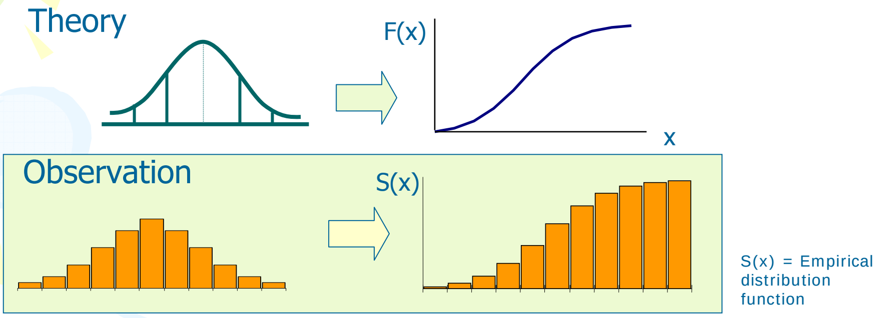
  - ข้อมูลปริมาณ

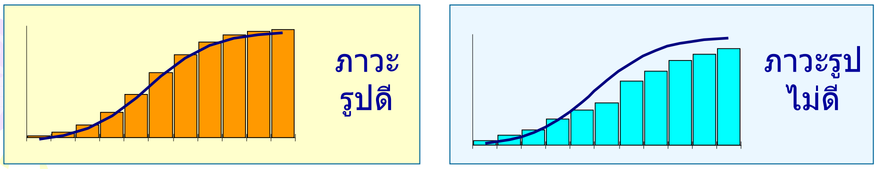


บทนำ

- **หลักการทดสอบภาวะรูปดีของ Kolmogorov-Smirnov**

อาศัยค่า Distribution function – $F(x) = P(X \leq x)$





ตัวอย่าง : การคำนวณ Distribution function

ในการทดสอบจับเวลาที่ใช้ในการวิ่งระยะทาง 1 ไมล์ของตัวอย่างเด็ก 5 คน บันทึกเวลาเป็นนาทีได้ดังนี้

6.23 5.58 7.01 6.42 5.20

ให้ X แทนเวลาที่ใช้ในการวิ่ง จงหา Empirical distribution function ของ X

- เรียง X จากค่าน้อยไปมาก
- คำนวณค่าความถี่สะสมชนิดน้อยกว่า (cumulative frequency)
- คำนวณค่า Relative cumulative frequency

X	f	F	S(x)
5.20	1	1	1/5
5.58	1	2	2/5
6.23	1	3	3/5
6.42	1	4	4/5
7.01	1	5	5/5

ตัวอย่าง : การคำนวณ Distribution function

ในการทดสอบจับเวลาที่ใช้ในการวิ่งระยะทาง 1 ไมล์ของตัวอย่างเด็ก 5 คน บันทึกเวลาเป็นนาทีได้ดังนี้

6.23 5.58 7.01 6.42 5.20

ให้ X แทนเวลาที่ใช้ในการวิ่ง ซึ่ง $X \sim N(\mu = 6, \sigma = 2)$ จงหา Distribution function ของ X

- เรียง X จากค่าน้อยไปมาก
- เนื่องจาก X ~ Normal จะคำนวณ
  - ค่า F(x) = P(X < x)
  - จึงต้องแปลง X -> Z แล้วหา F(x) จาก P(Z < z)

X	$Z=(x-\mu)/\sigma$	F(x)
5.20	-0.40	0.3446
5.58	-0.21	0.4168
6.23	0.115	0.5478
6.42	0.21	0.5793
7.01	0.505	0.6950

การทดสอบภาวะรูปดีของโคลโมโกรอฟ (Kolmogorov goodness of fit test)

- **Data**
  - X : X_1 X_2 ... X_n
    โดย n = ขนาดตัวอย่าง
  - การเตรียมข้อมูล
    เรียงข้อมูลจากค่าน้อยไปมาก

- **Assumptions**
  - ตัวอย่างถูกเลือกมาอย่างสุ่ม
  - ถ้า Distribution function ของ X ที่ต้องการทดสอบ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง การทดสอบนี้จะยิ่งมีความถูกต้อง

Kolmogorov goodness of fit test

- **Statistical Hypothesis**

เมื่อ $F^*(x)$ = Distribution function ที่สนใจทดสอบ

การทดสอบ 2 ทาง

$H_0 : F(x) = F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ x

$H_1 : F(x) \neq F^*(x)$ สำหรับอย่างน้อย 1 ค่าของ x

การทดสอบทางเดียวด้านน้อย

$H_0 : F(x) \geq F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ x

$H_1 : F(x) < F^*(x)$ สำหรับอย่างน้อย 1 ค่าของ x

การทดสอบทางเดียวด้านมาก

$H_0 : F(x) \leq F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ x

$H_1 : F(x) > F^*(x)$ สำหรับอย่างน้อย 1 ค่าของ x

Kolmogorov goodness of fit test

- **Statistical Test**

การทดสอบ 2 ทาง

$$\boxed{T_1 = \sup_x |F^*(x) - S(x)|} = \max_x |F^*(x) - S(x)|$$

เมื่อ sup = supreme (ค่าห่างที่สุด)

F*(x) = distribution function ของ x

S(x) = empirical dist. func. ของ x

การทดสอบทางเดียว

ด้านน้อย

$$\boxed{T_1^+ = \sup_x [F^*(x) - S(x)]}$$

ด้านมาก

$$\boxed{T_1^- = \sup_x [S(x) - F^*(x)]}$$

Kolmogorov goodness of fit test

- **เขตวิกฤต (Critical region)**

ที่ระดับนัยสำคัญ α จะกำหนดค่าวิกฤตด้านขวา นั่นคือ

เขตวิกฤต : $T > w_{1-\alpha}$

การประมาณค่า $w_{1-\alpha}$

ใช้ตาราง Kolmogorov (ตาราง 14)

- **สรุปผล**

ปฏิเสธ H_0 ถ้า T_1, T_1^+, หรือ T_1^- ตกในเขตวิกฤต

Table 14 : Quantiles of the Kolmogorov test statistic

One-Sided Test					
	p = .90	.95	.975	.99	.995
Two-Sided Test					
	p = .90	.95	.975	.99	.995
n = 1	.900	.950	.975	.990	.995
2	.684	.776	.842	.900	.929
3	.565	.636	.708	.785	.829
...					
40	.165	.189	.210	.235	.252
n > 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

w_p

ตัวอย่าง 1.1

สุ่มตัวอย่างขนาดเท่ากับ 10 ได้ดังนี้

X_1=.621 X_2=.503 X_3=.203 X_4=.477 X_5=.710

X_6=.581 X_7=.329 X_8=.480 X_9=.554 X_{10}=.382

จงทดสอบสมมุติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เพื่อดูว่าตัวอย่างเหล่านี้ถูกเลือกมาจากประชากรซึ่งมีการแจกแจงเอกรูป (uniform distribution) หรือไม่

พิจารณาโจทย์

- ข้อมูล X เป็นข้อมูลปริมาณ
- ต้องทดสอบภาวะรูปดีของ X ว่ามีการแจกแจงเอกรูปหรือไม่

ลักษณะ F(x) Uniform distribution function เมื่อ $0 \leq x \leq 1$

- $F(x) = 0 \; ; \; x < 0$
- $F(x) = x \; ; \; 0 \leq x < 1$
- $F(x) = 1 \; ; \; x \geq 1$

ตัวอย่างที่ 1.1

- **สมมติฐาน**

  H_0 : X มีการแจกแจงเอกรูป หรือ F(x) = F*(x)

  H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเอกรูป หรือ F(x) ≠ F*(x)

  เมื่อ F*(x) = Uniform distribution function

- **สถิติทดสอบ** $T_1 = \sup_x |F^*(x) - S(x)|$ = 0.29

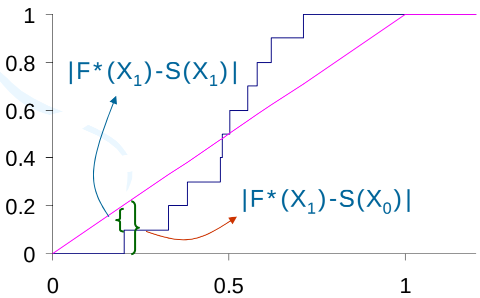
คำนวณ S(x), F*(x)

X	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S(x)	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
F*(x)	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
|F*(x)-S(x)|	.103	.129	.082	.077	.020	.097	.146	.219	.279	.290

ตัวอย่างที่ 1.1

คำนวณ S(x), F*(x)

X	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
S(x)	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
F*(x)	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
|F*(x)-S(x)|	.103	.129	.082	.077	.020	.097	.146	.219	.279	.290
|F*(x)-S(x_{-1})|	.203	.229	.182	.177	.080	.003	.046	.119	.179	.190



ตัวอย่างที่ 1.1

- **สมมติฐาน**

  $H_0 : F(x) = F^*(x)$ vs $H_1 : F(x) \neq F^*(x)$

- **สถิติทดสอบ**

  $T_1 = 0.29$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n = 10$,

  หาค่า $w_{1-\alpha} = w_{.95}$ จากตาราง 14 Two-sided test จะได้

  $w_{.95} = 0.409 \Rightarrow T > 0.409$

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0

  ข้อมูลมีการแจกแจงเอกรูป

ตัวอย่างที่ 1.1 ลองทดสอบทางเดียว

- **สมมติฐาน**

  $H_0 : F(x) \geq F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ X

  $H_1 : F(x) < F^*(x)$ สำหรับอย่างน้อย 1 ค่าของ X

- **สถิติทดสอบ** $T_1^- = \sup_x [F^*(x) - S(x)]$ **= 0.229**

คำนวณ S(x), F*(x)

X	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
S(x)	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
F*(x)	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
F*(x)-S(x)	.103	.129	.082	.077	-.020	-.097	-.146	-.219	-.279	-.290
$F^*(x)-S(x_{-1})$	.203	.229	.182	.177	.080	.003	-.046	-.119	-.179	-.190

ตัวอย่างที่ 1.1

- **สมมติฐาน**

  $H_0 : F(x) \geq F^*(x)$ vs $H_1 : F(x) < F^*(x)$

- **สถิติทดสอบ**

  $T_1^- = .229$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n = 10$,

  หาค่า $w_{1-\alpha} = w_{.95}$ จากตาราง 14 One-sided test จะได้ $w_{.95} = .369 \Rightarrow T > .369$

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0

ตัวอย่าง 1.2

สมมติว่านักวิจัยผู้หนึ่งสนใจที่จะทำการทดลองเพื่อสังเกตดูว่าพวกอเมริกันนิโกรชอบสีผิวชนิดใด นักวิจัยผู้นี้จึงทำการทดสอบโดยถ่ายรูปนิโกร 10 คน คนละ 1 ใบ และให้ช่างภาพอัดรูปนิโกรแต่ละคน ๆ ละ 5 ใบ โดยให้มีความดำของสีผิวแตกต่างกัน จากนั้นจึงเรียงอันดับของรูปดังนี้ คือรูปใบที่อัดดำที่สุดเป็นอันดับ 1 ดำน้อยลงมาเป็นอันดับ 2 และสุดท้ายใบที่ขาวที่สุดเป็นอันดับ 5 เมื่อให้นิโกรแต่ละคนที่เป็นตัวทดลองเลือกรูปของตัวเองจากรูป 5 ใบนั้น ถ้าสีผิวไม่มีความสำคัญสำหรับนิโกรแต่ละคน เขาก็จะเลือกรูปใดก็ได้จาก 5 ใบนั้น แต่ถ้าสีผิวมีความสำคัญ เขาจะเลือกรูปใบใดใบหนึ่งโดยเฉพาะ ข้อมูลที่ได้เป็นดังนี้

อันดับภาพที่เลือก	1	2	3	4	5
จำนวน	0	1	0	5	4

ตัวอย่างที่ 1.2

- **สมมติฐาน**

  H_0 : อันดับภาพที่เลือกไม่แตกต่างกัน หรือ $F(x) = F^*(x)$

  H_1 : อันดับภาพที่เลือกแตกต่างกัน หรือ $F(x) \neq F^*(x)$

  เมื่อ $F^*(x)$ = Uniform distribution function

- **สถิติทดสอบ** $T_1 = \sup_x |F^*(x) - S(x)|$ = 0.5

คำนวณ S(x), F*(x)

X	f	F	S(x)	F*(x)	|F*(x)-S(x)|
1	0	0	0	.2	.2
2	1	1	.1	.4	.3
3	0	1	.1	.6	.5
4	5	6	.6	.8	.2
5	4	10	1.0	1.0	0

ตัวอย่างที่ 1.2

- **สมมติฐาน**

  $H_0 : F(x) = F^*(x)$ vs $H_1 : F(x) \neq F^*(x)$

- **สถิติทดสอบ**

  $T_1 = 0.5$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n = 10$,

  หาค่า $w_{1-\alpha} = w_{.95}$ จากตาราง 14 Two-sided test จะได้

  $w_{.95} = 0.409 \Rightarrow T > 0.409$

- **สรุปผล** ปฏิเสธ H_0

  อันดับภาพที่เลือกแตกต่างกัน

แถบความเชื่อมั่นของฟังก์ชันการแจกแจงของประชากร (Confidence band for the population distribution function)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการประมาณค่าแบบช่วงของค่า F(x)
  - ใช้กับข้อมูลตั้งแต่มาตรเรียงลำดับ
  - อาศัยหลักการของการทดสอบ Kolmogorov ช่วยในการประมาณค่าแถบความเชื่อมั่น

Population

F(x) = ?

Sample

S(x)

$(1-\alpha)100\%$ CB ของ F(x)

$L(x) < F(x) < U(x)$

C.B. of F(x)

- **ข้อมูล (Data)**
  - $X : X_1 \;\; X_2 \;\; \ldots \;\; X_n$
  - ให้ n = ขนาดตัวอย่าง และ X ขึ้นอยู่กับ F(x)
- **ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption)**
  - ตัวอย่างถูกเลือกมาอย่างสุ่ม
  - ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง C.B. ของ F(x) ที่ได้จะอยู่ภายใต้ $1 - \alpha$

C.B. of F(x)

- วิธีการประมาณแถบความเชื่อมั่น (C.B.)
  - จากข้อมูล คำนวณค่า S(x)
  - ที่ระดับความเชื่อมั่น (1 - α)100% และขนาดตัวอย่าง n จากตารางที่ 14 เปิดหาค่า $w_{1-\alpha}$
  - คำนวณค่าแถบล่าง หรือ L(x) จาก
    $L(x) = S(x) - w_{1-\alpha}$ โดย L(x) มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0
  - คำนวณค่าแถบบน หรือ U(x) จาก
    $U(x) = S(x) + w_{1-\alpha}$ โดย U(x) มีค่ามากสุดเท่ากับ 1

$\boxed{(1 - \alpha)100\% \text{ C.B. of } F(x) \Rightarrow L(x) < F(x) < U(x)}$

ตัวอย่าง 1.3

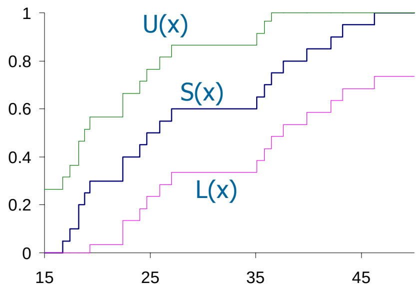
สมมติต้องการหาแถบความเชื่อมั่น 90% ของฟังก์ชันการแจกแจง F(x) โดยทำการสุ่มตัวอย่างขนาด 20 จากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงดังกล่าว ตัวอย่างเรียงลำดับจากน้อยไปมากดังนี้

16.7 17.4 18.2 18.2 18.8 19.3 22.4 22.4 24.0 24.7
25.9 27.0 35.1 35.8 36.5 37.6 39.8 42.1 43.2 46.2

- พิจารณาข้อมูล
  - ต้องการประมาณ C.B. ของ F(x)
  - กำหนด 1 - α = .90 และ n = 20

X	f	F	S(x)	L(x)	U(x)
16.7	1	1	.05	0	.315
17.4	1	2	.10	0	.365
18.2	2	4	.20	0	.465
18.8	1	5	.25	0	.515
19.3	1	6	.30	.035	.565
22.4	2	8	.40	.135	.665
24.0	1	9	.45	.185	.715
24.7	1	10	.50	.235	.765
25.9	1	11	.55	.285	.815
27.0	1	12	.60	.335	.865
35.1	1	13	.65	.385	.915
35.8	1	14	.70	.435	.965
36.5	1	15	.75	.485	1.0
37.6	1	16	.80	.535	1.0
39.8	1	17	.85	.585	1.0
42.1	1	18	.90	.635	1.0
43.2	1	19	.95	.685	1.0
46.2	1	20	1.0	.735	1.0

- คำนวณ S(x)
- กำหนด $1 - \alpha$ = .90 และ n = 20
  หาค่า $w_{.90}$ = .265
- คำนวณ L(x) = S(x) - .265
- คำนวณ U(x) = S(x) + .265



การทดสอบของลิลี่โฟร์
(Lilliefors test)

ใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติของข้อมูล

- **Data**
  - X : X_1 X_2 … X_n
    โดย n = ขนาดตัวอย่าง
  - การเตรียมข้อมูล
    เรียงข้อมูลจากค่าน้อยไปมาก
- **Assumptions**
  - ตัวอย่างถูกเลือกมาอย่างสุ่ม

Lilliefors test

- **Statistical Hypothesis**

  H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

  H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงปกติ

- **Statistical Test**

$$\boxed{T_2 = \sup_x |F^*(x) - S(x)|}$$

เมื่อ F*(x) = Normal distribution function ของ x

S(x) = Empirical distribution function ของ x

Lilliefors test

- **เขตวิกฤต (Critical region)**

ที่ระดับนัยสำคัญ α จะกำหนดค่าวิกฤตด้านขวา นั่นคือ

$$\boxed{\text{เขตวิกฤต : } T > w_{1-\alpha}}$$

การประมาณค่า $w_{1-\alpha}$

ใช้ตาราง Lilliefors (ตาราง 15)

- **สรุปผล**

ปฏิเสธ H_0 ถ้า T_2 ตกในเขตวิกฤต

Table 15 : Quantiles of the Lilliefors test statistic

	p = .80	.85	.90	.95	.99
n = 4	.300	.319	.352	.381	.417
5	.285	.299	.315	.337	.405
6	.265	.277	.294	.319	.364
…					
30	.131	.136	.144	.161	.187
n > 30	$.736/\sqrt{n}$	$.768/\sqrt{n}$	$.805/\sqrt{n}$	$.886/\sqrt{n}$	$1.031/\sqrt{n}$

w_p

ที่ α = .05, n = 6
จะได้ $w_{1-\alpha}$ = ?

ตัวอย่าง 1.4

ในการสุ่มตัวอย่าง 50 จำนวนจากประชากรชุดหนึ่ง แล้วเรียงตามลำดับได้ดังนี้

23 23 24 27 29 31 32 33 33 35 36 37 40 42 43
43 44 45 48 48 54 54 56 57 57 58 58 58 58 59
61 61 62 63 64 65 66 68 68 70 73 73 74 75 77
81 87 89 93 97

จงทดสอบสมมุติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ว่าประชากรที่สุ่มตัวอย่างมานั้นมีการแจกแจงปกติ

ตัวอย่างที่ 1.4

- **สมมติฐาน**

  H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

  H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงปกติ

- **สถิติทดสอบ**

$$T_2 = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$$

X	f	F	S(x)	Z	F*(x)
23	2	2	.04	-1.69	.0455
24	1	3	.06	-1.63	.0516
27	1	4	.08	-1.48	.0694
29	1	5	.10	-1.37	.0853
31	1	6	.12	-1.26	.1038
32	1	7	.14	-1.21	.1131
33	2	9	.18	-1.16	.1230
35	1	10	.20	-1.05	.1469
36	1	11	.22	-1.00	.1587
37	1	12	.24	-0.95	.1711
40	1	13	.26	-0.79	.2148
42	1	14	.28	-0.69	.2451
43	2	16	.32	-0.63	.2643
44	1	17	.34	-0.58	.2810
45	1	18	.36	-0.53	.2981
48	2	20	.40	-0.37	.3557
54	2	22	.44	-0.05	.4801
56	1	23	.46	0.05	.5199
57	2	25	.50	0.10	.5398

$\bar{x}$ = 55.04, s = 19

X	f	F	S(x)	z	F*(x)
58	4	29	.58	.16	.5636
59	1	30	.60	.21	.5832
61	2	32	.64	.31	.6217
62	1	33	.66	.37	.6443
63	1	34	.68	.42	.6628
64	1	35	.70	.47	.6808
65	1	36	.72	.52	.6985
66	1	37	.74	.58	.7190
68	2	39	.78	.68	.7517
70	1	40	.80	.79	.7852
73	2	42	.84	.95	.8289
74	1	43	.86	1.00	.8413
75	1	44	.88	1.05	.8531
77	1	45	.90	1.16	.8770
81	1	46	.92	1.37	.9147
87	1	47	.94	1.68	.9535
89	1	48	.96	1.79	.9633
93	1	49	.98	2.00	.9772
97	1	50	1.00	2.21	.9864

X	S(x)	F*(x)	|F*(x)-S(x)|	|F*(x)-S(x₋₁)|
23	.04	.0455	.0055	.0455
24	.06	.0516	.0084	.0116
27	.08	.0694	.0106	.0094
29	.10	.0853	.0147	.0053
31	.12	.1038	.0162	.0038
32	.14	.1131	.0269	.0069
33	.18	.1230	.0570	.0017
35	.20	.1469	.0531	.0331
36	.22	.1587	.0613	.0413
37	.24	.1711	.0689	.0489
40	.26	.2148	.0452	.0252
42	.28	.2451	.0349	.0149
43	.32	.2643	.0557	.0157
44	.34	.2810	.0590	.0390
45	.36	.2981	.0619	.0419
48	.40	.3557	.0443	.0043
54	.44	.4801	.0401	.0801
56	.46	.5199	.0599	.0799
57	.50	.5398	.0398	.0798

X	S(x)	F*(x)	|F*(x)-S(x)|	|F*(x)-S(x₋₁)|
58	.58	.5636	.0164	.0636
59	.60	.5832	.0168	.0032
61	.64	.6217	.0183	.0217
62	.66	.6443	.0157	.0043
63	.68	.6628	.0172	.0028
64	.70	.6808	.0192	.0008
65	.72	.6985	.0215	.0015
66	.74	.7190	.0210	.0010
68	.78	.7517	.0283	.0117
70	.80	.7852	.0148	.0052
73	.84	.8289	.0111	.0289
74	.86	.8413	.0187	.0013
75	.88	.8531	.0269	.0069
77	.90	.8770	.0230	.0030
81	.92	.9147	.0053	.0147
87	.94	.9535	.0135	.0335
89	.96	.9633	.0033	.0233
93	.98	.9772	.0028	.0172
97	1.00	.9864	.0136	.0064

ตัวอย่างที่ 1.4

- **สมมติฐาน**

  H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

  H_1 : ข้อมูลมีการแจกแจงไม่ปกติ

- **สถิติทดสอบ**

  $T_2 = 0.0801$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, n = 50,

  หาค่า $w_{1-\alpha} = w_{.95}$ จากตาราง 15 จะได้

  $w_{.95} = 0.886/\sqrt{50} = .125 \Rightarrow T > 0.125$

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0

  ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

การทดสอบภาวะรูปดีของคราแมร์-ฟอน-มิส (Cramer-Van Mises goodness of fit test)

ใช้ในการทดสอบภาวะรูปดีของข้อมูล

- **Data**
  - X : X_1 X_2 ... X_n
    โดย n = ขนาดตัวอย่าง
  - การเตรียมข้อมูล
    เรียงข้อมูลจากค่าน้อยไปมาก โดย $X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq \ldots \leq X^{(n)}$
- **Assumptions**
  - ตัวอย่างถูกเลือกมาอย่างสุ่ม

Cramer-Van Mises test

- **Statistical Hypothesis**

  H_0 : F(x) = F*(x) สำหรับทุกค่าของ x

  H_1 : F(x) $\neq$ F*(x) สำหรับอย่างน้อย 1 ค่าของ x
- **Statistical Test**

$$\boxed{T_3 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F^*(x^{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2}$$

เมื่อ $F^*(x^{(i)})$ = Distribution function ของ x ที่อันดับ i

Cramer-Van Mises test

- **เขตวิกฤต (Critical region)**

ที่ระดับนัยสำคัญ α จะกำหนดค่าวิกฤตด้านขวา นั่นคือ

$\boxed{\text{เขตวิกฤต : } T > w_{1-\alpha}}$

การประมาณค่า $w_{1-\alpha}$

$w_{.10} = .046$	$w_{.40} = .097$	$w_{.70} = .184$	$w_{.95} = .461$
$w_{.20} = .062$	$w_{.50} = .119$	$w_{.80} = .241$	$w_{.99} = .743$
$w_{.30} = .079$	$w_{.60} = .147$	$w_{.90} = .347$	$w_{.999} = 1.168$

- **สรุปผล**

ปฏิเสธ H_0 ถ้า T_3 ตกในเขตวิกฤต

ตัวอย่าง 1.5 จากตัวอย่าง 1.1

สุ่มตัวอย่างขนาดเท่ากับ 10 ได้ดังนี้

X_1=.621 X_2=.503 X_3=.203 X_4=.477 X_5=.710

X_6=.581 X_7=.329 X_8=.480 X_9=.554 X_{10}=.382

จงทดสอบสมมุติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เพื่อดูว่าตัวอย่างเหล่านี้ถูกเลือกมาจากประชากรซึ่งมีการแจกแจงเอกรูป (uniform distribution) หรือไม่

พิจารณาโจทย์

- ข้อมูล X เป็นข้อมูลปริมาณ
- ต้องทดสอบภาวะรูปดีของ X ว่ามีการแจกแจงเอกรูปหรือไม่

ลักษณะ F(x) Uniform distribution function เมื่อ $0 \leq x \leq 1$

- $F(x) = 0 \; ; \; x < 0$
- $F(x) = x \; ; \; 0 \leq x < 1$
- $F(x) = 1 \; ; \; x \geq 1$

ตัวอย่างที่ 1.5

- **สมมติฐาน**

  H_0 : X มีการแจกแจงเอกรูป หรือ F(x) = F*(x)

  H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเอกรูป หรือ $F(x) \neq F^*(x)$

  เมื่อ F*(x) = Uniform distribution function

- **สถิติทดสอบ** $T_3 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F^*(x^{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 = \frac{1}{120} + .240 = .248$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
F*(x)	.203	.329	.382	.477	.480	.503	.554	.581	.621	.710
(2i-1)/2n	.05	.15	.25	.35	.45	.55	.65	.75	.85	.95
$[F(x)-(2i-1)/2n]^2$	.0234	.0320	.0174	.0161	.0009	.0072	.0092	.0286	.0524	.0576

ตัวอย่างที่ 1.5

- **สมมติฐาน**

  $H_0 : F(x) = F^*(x)$ vs $H_1 : F(x) \neq F^*(x)$

- **สถิติทดสอบ**

  $T_3 = 0.248$

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, n = 10,

  หาค่า $w_{1-\alpha} = w_{.95} = 0.461$ => T > 0.461

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0

  ข้อมูลมีการแจกแจงเอกรูป

เนื้อหา

- การทดสอบซึ่งใช้การแจกแจงทวินามเป็นหลัก
- ขีดจำกัดที่ยอมรับได้
- การทดสอบแบบไคสแควร์
- การทดสอบซึ่งอาศัยหลักสถิติของโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ
- **การทดสอบซึ่งอาศัยหลักของรันส์**

การทดสอบซึ่งอาศัยหลักของรันส์ (Tests based on Runs)

- บทนำ
- การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์
- รันส์สูงและต่ำกว่ามัธยฐาน

บทนำ

- **เป้าหมาย**
  – ใช้ในการทดสอบที่ต้องการตรวจสอบว่า ข้อมูลได้มาอย่างสุ่ม
- **หลักการทดสอบ**
  – พิจารณาจากลำดับค่าสังเกตที่ได้จากข้อมูลตัวอย่าง โดยกลุ่มค่าสังเกตที่เหมือนกันและเรียงติดกัน เรียกว่า รันส์ (runs)
  – หากค่าสังเกตที่ได้คละกันไปหมด -> จากการสุ่ม
  – หากค่าสังเกตที่ได้แบ่งกลุ่มชัดเจน -> ไม่ใช่การสุ่ม

บทนำ

- **ตัวอย่าง runs**
  – ผลผลิตที่ได้จากเครื่องจักร ซึ่งมีทั้งชิ้นที่บกพร่อง (defective) หรือไม่บกพร่อง (nondefective) ได้ผลดังนี้

  n n n n n d d d d n n n n n n n n n n d d
  n n d d d d n d d n n

  จำนวนรันส์ = 9
  – ทดลองโยนเหรียญ 20 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้

  T H H H H H H T H T H T T H H H T H T H

  จำนวนรันส์ = 12
  – ผลการตรวจโรควัณโรคในผู้ป่วยเอดส์ 14 คน ได้ผลดังนี้

  \+ + - - - + - - - - + + - +

  จำนวนรันส์ = 7

บทนำ

- **จำนวน runs กับการสุ่ม**
  - ทดลองโยนเหรียญ 20 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้

    กรณี 1 :

    T H H H H H H T H T H T T H H H T H T H

    จำนวนรันส์ = 12

    กรณี 2 :

    H H H H H H H H H H T T T T T T T T T T

    จำนวนรันส์ = 2

    กรณี 3 :

    H T H T H T H T H T H T H T H T H T H T

    จำนวนรันส์ = 20

การทดสอบรันส์ของวอลด์-วอลฟอวิทซ์ (Wald-Wolfowitz Runs Test)

- **Data**
  - Sequence ของค่าสังเกต (a, b) จากตัวอย่างขนาด n

    โดย n_1 = จำนวนครั้งที่เกิด a

    n_2 = จำนวนครั้งที่เกิด b

- **Assumptions**
  - ค่าสังเกตมีเพียง 2 ค่า คือ a และ b เท่านั้น
  - ข้อมูลต้องอยู่ในมาตรนามบัญญัติ (2 กลุ่ม)

Wald-Wolfowitz Runs Test

- **Statistical Hypothesis**

  H_0 : กรรมวิธีในการได้ข้อมูลเป็นแบบสุ่ม

  H_1 : กรรมวิธีในการได้ข้อมูลไม่เป็นแบบสุ่ม

- **Statistical Test**

  T = จำนวนรันส์ของค่าสังเกต

- **Critical Region**

  ที่ระดับนัยสำคัญ α เขตวิกฤต คือ

  $T < w_{\alpha/2}$ หรือ $T > w_{1-\alpha/2}$

  ปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าสถิติ T ตกในเขตวิกฤต

โดย $w_{\alpha/2}$ และ $w_{1-\alpha/2}$ หาได้จากตาราง 3

Table 3 : Quantiles of the Wald-Wolfowitz Total

N_1	N_2	$w_{.005}$	$w_{.01}$	$w_{.025}$	…	$w_{.995}$
…						
5	5	-	3	3	…	-
	8	3	3	4	…	-
	11	4	4	5	…	-
	14	4	4	5	…	-
	17	4	5	5	…	-
	…					
20	20	13	14	15	…	29

For n or m greater than 20

$$w_p = \frac{2mn}{m+n} + 1 + z_p \sqrt{\frac{2mn(2mn-m-n)}{(m+n)^2(m+n-1)}}$$

ที่ $n_1 = 8$, $n_2 = 14$ และ $\alpha = 0.05$ จงหา $W_{1-\alpha}$

ตัวอย่างที่ 1

สมมติทำการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ 20 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้
H H H H H H H H H H T T T T T T T T T T
จงทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05 เพื่อดูว่าลำดับการเกิดขึ้นของการโยนเหรียญเป็นแบบคละหรือไม่

- **พิจารณาข้อมูล**
  - เป็นข้อมูลนามบัญญัติจำนวน 2 กลุ่ม
  - ต้องการทดสอบค่าสังเกตที่สนใจว่าเกิดขึ้นอย่างสุ่มหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1

- **สมมติฐาน**

  H_0 : ลำดับการเกิดของผลลัพธ์การโยนเหรียญเป็นแบบคละ

  H_1 : ไม่เป็นแบบคละ

- **สถิติทดสอบ** T = จำนวนรันส์ = 2

  H H H H H H H H H H T T T T T T T T T T

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ (ให้ใช้ค่าใกล้เคียง)

  $w_{.025} = 8$, $w_{.975} = 16 \Rightarrow T < 8$ หรือ $T > 16$

- **สรุปผล** ปฏิเสธ H_0

ตัวอย่างที่ 2

สมมติทำการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ 20 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้

H T H T H T H T H T H T H T H T H T H T

จงทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05 เพื่อดูว่าลำดับการเกิดขึ้นของการโยนเหรียญเป็นแบบคละหรือไม่

- **สมมติฐาน**

  H_0 : ลำดับการเกิดของผลลัพธ์การโยนเหรียญเป็นแบบคละ

  H_1 : ไม่เป็นแบบคละ

- **สถิติทดสอบ** T = จำนวนรันส์ = 20
- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$

  $\Rightarrow T < 8$ หรือ $T > 16$

- **สรุปผล** ปฏิเสธ H_0

ตัวอย่างที่ 3

มีผู้สนใจที่จะศึกษาดูว่า การเรียงแถวของผู้ชายและผู้หญิงในการยืนเข้าคิวซื้อตั๋วดูหนังหน้าช่องขายตั๋ว ว่าเป็นการเรียงแถวแบบคละหรือไม่ เขาจึงไปเลือกตัดแถวมาส่วนหนึ่งซึ่งประกอบด้วยคน 50 คน จดเพศของผู้ยืนเข้าแถวตามลำดับได้ดังนี้ (M = ชาย, F = หญิง)

M F M F M M M F F M F M F M M M M F M F

M F M M F F F M F M F M F M M F M M F M

M M M F M F M M F M

- **พิจารณาข้อมูล**
  - เป็นข้อมูลนามบัญญัติจำนวน 2 กลุ่ม
  - ต้องการทดสอบค่าสังเกตที่สนใจว่าเกิดขึ้นอย่างสุ่มหรือไม่

ตัวอย่างที่ 3

- **สมมติฐาน**

  H_0 : การยืนเข้าคิวของผู้ชายและผู้หญิงเป็นแบบคละ

  H_1 : ไม่เป็นแบบคละ

- **สถิติทดสอบ**

  T = จำนวนรันส์ = 35

M F M F M M M F F M F M F M M M M F M F
M F M M F F F M F M F M F M M F M M F M
M M M F M F M M F M

ตัวอย่างที่ 3

- **สมมติฐาน**

  H_0 : การยืนเข้าคิวของผู้ชายและผู้หญิงเป็นแบบคละ

  H_1 : ไม่เป็นแบบคละ

- **สถิติทดสอบ** T = 35

- **เขตวิกฤต** ที่ $\alpha = 0.05$, $n_1 = 30$, $n_2 = 20$

$$w_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} \qquad z_{.975} = 1.96$$

  $w_{.025} = 17.42$, $w_{.975} = 30.58$ => $T < 17.42$ หรือ $T > 30.58$

- **สรุปผล** ปฏิเสธ H_0

รันส์สูงและต่ำกว่ามัธยฐาน (Runs above and below median)

- **Data**
  - ข้อมูลปริมาณ X : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จากตัวอย่างขนาด n
  - คำนวณค่ามัธยฐาน (median) ของข้อมูล
  - เปรียบเทียบค่าสังเกต (X_i) กับค่ามัธยฐาน (M)
    - ให้เครื่องหมาย "+" ถ้า $X_i > M$
    - ให้เครื่องหมาย "-" ถ้า $X_i < M$

    โดย n_1 = จำนวนครั้งที่เกิด "+"

    n_2 = จำนวนครั้งที่เกิด "-"
- **การทดสอบ** ใช้ขั้นตอนเหมือนกับ **Wald-Wolfowitz Runs Test**

ตัวอย่างที่ 4

ในการศึกษาความก้าวร้าวของเด็กเล็ก โดยวิธีสังเกตการเล่นของเด็กเป็นคู่ ทำการสุ่มตัวอย่างเด็ก 24 คน จากโรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งและโดยปกติเด็กเหล่านี้ก็เล่นด้วยกันอยู่แล้ว แต่เนื่องจากการศึกษานี้สามารถทำการสังเกตเด็กได้วันละ 2 คน ผู้วิจัยจึงมีความวิตกว่าการศึกษาอาจเกิดความเอียงเอน ถ้าเด็กที่ถูกเป็นตัวทดลองไปคุยให้เพื่อนที่จะทดสอบทีหลังฟัง เขาจึงคิดว่าถ้าการพูดคุยของเด็กมีผลต่อการศึกษา จะทำให้ข้อมูลนั้นขาดความคละ จึงต้องการตรวจสอบข้อวิตกดังกล่าว

31	23	36	43	51	44	12	26	43	75	2	3
15	16	78	24	13	27	86	61	13	7	6	8

- **พิจารณาข้อมูล**
  - เป็นข้อมูลปริมาณ
  - ต้องการทดสอบค่าสังเกตที่สนใจว่าเกิดขึ้นอย่างสุ่มหรือไม่

ตัวอย่างที่ 4

- **เตรียมข้อมูล**

- คำนวณค่ามัธยฐาน (M)

2 3 6 7 8 12 13 13 15 16 23 24 26 ...

M = (24+26)/2 = 25

- เทียบค่าข้อมูลกับ มัธยฐาน เพื่อกำหนด "+" หรือ "-"

31	23	36	43	51	44	12	26	43	75	2	3
+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-
15	16	78	24	13	27	86	61	13	7	6	8
-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-

จำนวนรันส์ = 10

ตัวอย่างที่ 4

- **สมมติฐาน**

H_0 : เครื่องหมายทั้งสองคละกัน

H_1 : ไม่คละกัน

- **สถิติทดสอบ** T = 10

- **เขตวิกฤต** ที่ α = 0.05, n_1 = 12, n_2 = 12

$w_{.025}$ = 8, $w_{.975}$ = 16 => T < 8 หรือ T > 16

- **สรุปผล** ไม่ปฏิเสธ H_0