การทดสอบสำหรับตัวอย่างชุดเดียว (I)

208348 : สถิตินอนพาราเมตริก

โดย ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

เนื้อหา

- การทดสอบซึ่งใช้การแจกแจงทวินามเป็นหลัก
- ขีดจำกัดที่ยอมรับได้
- การทดสอบแบบไคสแควร์
- การทดสอบซึ่งอาศัยหลักสถิติของโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ
- การทดสอบซึ่งอาศัยหลักของรันส์

การทดสอบบางอย่างซึ่งใช้การแจกแจงทวินามเป็นหลัก

- บทนำ
- การทดสอบแบบทวินาม (Binomial test)
- ช่วงความเชื่อมั่นของความน่าจะเป็น
- การทดสอบควอนไทล์ (Quantile test)
- ช่วงความเชื่อมั่นของควอนไทล์

บทนำ

- การทดสอบบางอย่างซึ่งใช้การแจกแจงแบบทวินามเป็นหลัก จะใช้ในการวิเคราะห์**ข้อมูลแบบทวิภาค (Dichotomous)**
- ข้อมูลแบบทวิภาค คือข้อมูลในมาตรวัดนามบัญญัติซึ่งมีเพียง 2 กลุ่มเท่านั้น

  โดยปกติมักกำหนดเป็น
  - กลุ่มที่สนใจ หรือสำเร็จ
  - กลุ่มที่ไม่สนใจ หรือล้มเหลว

  หากสนใจจำนวนสมาชิกในกลุ่มที่สนใจ (X) มักพบว่า X จะมี**การแจกแจงแบบทวินาม**

บทนำ

- **การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)**

การทดลองทวินาม

- เป็นการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยที่การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน
- ในแต่ละครั้งของการทดลองเกิดผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 อย่าง คือ ผลลัพธ์ที่สนใจ (success, *S*) และผลลัพธ์ที่ไม่สนใจ (failure, *F*)
- ในแต่ละครั้งของการทดลอง มีค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สนใจคือ P(S) = $\boldsymbol{p}$ (P(F) = $\boldsymbol{q}$ = 1-p)
- สนใจตัวแปรสุ่ม $\boldsymbol{X}$ จำนวนครั้งที่เกิดผลลัพธ์ที่สนใจ โดยค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, ..., n

  จะได้ว่า $\boldsymbol{X \sim b(x;\, n,\, p)}$

  อ่านว่า X มีการแจกแจงแบบทวินาม ภายใต้การทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยมี P(S) = p

บทนำ

- **Ex : Binomial Trial**

พิจารณาการศึกษาต่อไปนี้ว่าเป็นการทดลองทวินามหรือไม่

- ในการผ่าตัดรักษาผู้ป่วยโรคชนิดหนึ่ง มีโอกาสสำเร็จ 85% ถ้าแพทย์ทำการผ่าตัดดังกล่าวกับผู้ป่วย 8 ราย สนใจจำนวนครั้งที่ประสบผลสำเร็จในการผ่าตัด

  เป็นการทดลองทวินาม

  โดย $X \sim b(x; n = 8, p = 0.85)$

บทนำ

- **Binomial Probabilities**

  จากการทดลองทวินาม ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สนใจ *x* ครั้ง จากการทดลอง *n* ครั้ง คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}}$$

Probability mass function

โดยที่ $0 \leq P(x_i) \leq 1$ และ $\sum P(x_i) = 1$

$E(X) = np$

$V(X) = npq$

Ex : Finding binomial distribution

- ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จำนวน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นหน้า 6 เพียง 1 ครั้ง

X = จำนวนลูกเต๋าขึ้นหน้า 6

$= 0, 1, 2, 3$

$X \sim b(x, n = 3, p = 1/6)$

$P(x=1) = {}^{3}C_{1}(1/6)^{1}(5/6)^{2}$

$= 3(1/6)(5/6)^{2}$

Table : Binomial Dist.

			p		
n	y	.05	.10	…	.45
1	0	.9500	.9000	…	.5500
	1	1.0000	1.0000	…	1.0000
		$P(Y \leq 1)$			
2	0	…			.3025
	1	…			.7975
	2	…			1.000
…					

ตัวอย่าง

- โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนสวมแว่นสายตาสั้น 15% ถ้าสุ่มนักเรียนจำนวน 10 คน จงหาความน่าจะเป็น
  ก. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้น 3 คน
  ข. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้นอย่างมาก 3 คน
  ค. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้นมากกว่า 3 คน

ให้ X = จำนวนนักเรียนที่สวมแว่นสายตาสั้น

$= 0, 1, 2, \ldots, 10$

$X \sim b(x; n = 10, p = 15\% = 0.15)$

ก. $P(x=3) = {}^{10}C_3(0.15)^3(0.85)^7$

$= 0.9500 - 0.8202 = 0.1298$

ข. $P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

$= 0.95$

ตัวอย่าง

ให้ X = จำนวนนักเรียนที่สวมแว่นสายตาสั้น

$= 0, 1, 2, \ldots, 10$

$X \sim b(x; n = 10, p = 15\% = 0.15)$

ค. $P(x > 3) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + \ldots + P(x=10)$

$= 1 - 0.95 = 0.05$

จาก $\sum P(x_i) = 1$

ดังนั้น

$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+\ldots+P(x=10) = 1$

จะได้ว่า $P(x=4) + \ldots + P(x=10) = 1 - P(x \leq 3)$

การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการทดสอบที่ง่ายและสะดวก
  - ใช้กับข้อมูลทุกมาตรวัด
  - มีกำลังในการทดสอบที่ดี
  - ใช้สำหรับทดสอบค่าสัดส่วนของเหตุการณ์ที่สนใจ

Binomial Test

- **ข้อมูล (Data)**
  - ผลจากการทดลอง n ครั้ง แต่ละการทดลองได้ผลเป็น "สำเร็จ (S)" หรือ "ล้มเหลว (F)"
  - ให้ O_1 = จำนวนครั้งที่สำเร็จ
    O_2 = จำนวนครั้งที่ล้มเหลว
  - $O_1 + O_2 = n$
- **ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption)**
  - การทดลอง n ครั้งไม่เกิดขึ้นร่วมกัน (Mutually exclusive)
  - ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลสำเร็จในแต่ละการทดลอง = p

Binomial Test

- **สมมุติฐานทางสถิติ (Statistical hypothesis)**
  - การทดสอบ 2 ทาง (2 tailed test)

    $H_0 : P = p^*$ vs. $H_1 : P \neq p^*$

    เมื่อ **p*** = ค่าคงที่ โดย **$0 \leq p^* \leq 1$**
  - การทดสอบทางเดียวด้านมาก

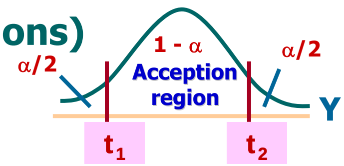
    $H_0 : P \leq p^*$ (หรือ $P = p^*$) vs. $H_1 : P > p^*$
  - การทดสอบทางเดียวด้านน้อย

    $H_0 : P \geq p^*$ (หรือ $P = p^*$) vs. $H_1 : P < p^*$
- **สถิติทดสอบ (Statistical Test)**

  T = จำนวนครั้งที่ได้ผลสำเร็จ = O_1

Binomial Test

- **อาณาเขตวิกฤต (Critical Regions)**



ที่ระดับนัยสำคัญ α

  – **กรณีการทดสอบ 2 ทาง**

  จะกำหนดค่าวิกฤตทั้งด้านซ้าย (t_1) และขวา (t_2) นั่นคือ

  เขตวิกฤต : $T \le t_1$ หรือ $T > t_2$

  - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \le 20$)**

    ใช้<u>ตารางทวินาม</u>ที่ค่า p* และ n ทำการพิจารณาค่าที่ทำให้ $\alpha_1 \approx \alpha_2$

    $P(Y \le t_1) = \alpha_1$

    และ $P(Y > t_2) = \alpha_2$ หรือ $P(Y \le t_2) = 1 - \alpha_2$

  - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

    ประมาณค่า $t_1 = np^* + z_{\alpha/2}\sqrt{np^*(1 - p^*)}$ และ

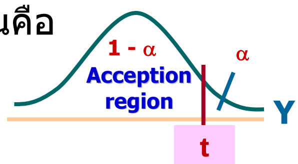
    $t_2 = np^* + z_{1-\alpha/2}\sqrt{np^*(1 - p^*)}$

Binomial Test

- **Critical Regions (ต่อ) ที่ระดับนัยสำคัญ α**

  – **กรณีการทดสอบทางเดียวด้านมาก**

  จะกำหนดค่าวิกฤตเฉพาะด้านขวา นั่นคือ



  เขตวิกฤต : $T > t$

  - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \le 20$)**

    ใช้ตารางทวินามที่ p*, n ทำการพิจารณาค่า

    $P(Y > t) = \alpha$ หรือ $P(Y \le t) = 1 - \alpha$

  - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

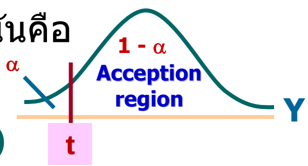
    ประมาณค่า $t = np^* + z_{1-\alpha}\sqrt{np^*(1-p^*)}$

Binomial Test

- **Critical Regions (ต่อ)** **ที่ระดับนัยสำคัญ** α
  - **กรณีการทดสอบทางเดียวด้านน้อย**

    จะกำหนดค่าวิกฤตเฉพาะด้านซ้าย นั่นคือ

    เขตวิกฤต : $T \leq t$



    - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 20$)**

      ใช้ตารางทวินามที่ p*, n ทำการพิจารณาค่า

      $P(Y \leq t) = \alpha$
    - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

      ประมาณค่า $t = np^* + z_\alpha \sqrt{np^*(1-p^*)}$

Binomial Test

- **ทดลองหาค่าวิกฤต**
  - จงหาค่าวิกฤตของการทดสอบ 2 ทาง เมื่อกำหนด $\alpha = 0.05$, $p^* = 0.5$ และ $n = 10$

    $P(Y \leq 1) = 0.0107$ $P(Y \leq 2) = 0.0547$ $P(Y \leq t_1) = .025$

    $P(Y \leq 8) = 0.9893$ $P(Y \leq 7) = 0.9453$ $P(Y \leq t_2) = .975$

    ดังนั้น เขตวิกฤตคือ $T \leq 1$ หรือ $T > 7$ ($T \geq 8$)
  - จงหาค่าวิกฤตของการทดสอบทางเดียวด้านมาก เมื่อกำหนด $\alpha = 0.05$, $p^* = 0.5$ และ $n = 10$

    $P(Y \leq 8) = 0.9893$ $P(Y \leq 7) = 0.9453$ $P(Y \leq t) = .95$

    ดังนั้น เขตวิกฤตคือ $T > 7$

Binomial Test

- **การตัดสินใจ**

  จะปฏิเสธ H_0 เมื่อค่า T_{cal} ที่คำนวณได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต

ตัวอย่าง 1

เครื่องจักรเครื่องหนึ่งยังสามารถทำงานได้ ถ้า 5% หรือน้อยกว่าของส่วนประกอบ (ชิ้นส่วน) เสีย แต่ถ้าเสียมากกว่า 5% ก็ต้องได้รับการซ่อมแซม

ถ้าหยิบชิ้นส่วนมา 10 ชิ้นจากเครื่องจักรหนึ่ง แล้วพบชิ้นส่วนเสียหรือชำรุด 1 ชิ้น จะสรุปผลได้อย่างไร

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูลทดลองหยิบชิ้นส่วน 10 ชิ้น ตรวจสอบแต่ละชิ้นได้ผลเป็น ดี หรือเสีย => การทดลองทวินาม
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรนามบัญญัติ
  - ต้องการทดสอบสัดส่วนที่เสียเกินกว่า 5% หรือไม่ นั่นคือ $P > .05$?

ข้อสงสัยคือ P > .05 ?

- **Hypothesis**

  H_0 : P = .05

  H_1 : P > .05

- **Statistical Test**

  T_{cal} = จำนวนชิ้นส่วนที่เสีย

  = 1 **[n=10]**

- **Critical Region** กำหนด α = 0.05

  ทดสอบทางเดียวด้านมาก, n = 10, p* = .05

  จากตารางทวินาม $P(Y \leq 1) = 0.9139$

  เขตวิกฤต คือ T > 1

- **Conclusion**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง **Accept H_0** นั่นคือ

  ที่ α = 0.05 เครื่องจักรนี้ยังสามารถทำงานได้อยู่

ตัวอย่าง 2

ในการผสมพันธุ์พืช 2 ชนิด ภายใต้ทฤษฎีอย่างง่ายของ Mendel จะได้ว่า ¼ ของต้นไม้จะเป็นพันธุ์เตี้ย และ ¾ ของต้นไม้จะเป็นพันธุ์สูง ในการทดลองเพื่อทดสอบดูว่าข้อสมมติตามทฤษฎีดังกล่าวจะเป็นจริงหรือไม่ พบว่ามีต้นไม้พันธุ์เตี้ย 243 ต้น และพันธุ์สูง 682 ต้น ท่านจะสรุปผลอย่างไร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - เป็นข้อมูลทดลองปลูกไม้ 925 ต้น ผลการปลูกแต่ละต้นเป็นต้นเตี้ย หรือต้นสูง => การทดลองทวินาม
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรนามบัญญัติ
  - ต้องการทดสอบว่า ทฤษฎี Mendel เป็นจริงหรือไม่

    สัดส่วนต้นเตี้ย (P) = ¼ ? สัดส่วนต้นสูง (Q) = ¾ ?

ข้อสงสัยคือ P = ¼ = .25 ?

- **Hypothesis**

  H_0 : P = .25

  H_1 : P $\neq$ .25

- **Statistical Test**

  T_{cal} = จำนวนต้นเตี้ยที่ได้

  = 243 **[n=925]**

- **Critical Region** กำหนด α = 0.05

  ทดสอบ 2 ทาง, n = 925, p* = .25

  ประมาณ $t = np^* \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{np^*(1-p^*)}$

  t_1 = 925(.25) – 1.96√925(.25)(.75) = 205.44

  t_2 = 925(.25) + 1.96√925(.25)(.75) = 257.06

  เขตวิกฤต คือ T $\leq$ 205.44 หรือ T > 257.06

- **Conclusion**

  จาก T_{cal} ไม่ตกในเขตวิกฤต จึง accept $\mathbf{H_0}$ นั่นคือ

  ที่ α = 0.05 ทฤษฎี Mendel เป็นจริง

ช่วงความเชื่อมั่นของความน่าจะเป็น (Confidence Interval for a Probability)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการประมาณค่าแบบช่วงของค่าสัดส่วนประชากร
  - ใช้กับข้อมูลทุกมาตรวัด
  - อาศัยหลักการของการทดสอบทวินามช่วยในการประมาณค่าแบบช่วง

Population		Sample
P = ?	→	p = Y/n

(1-α)100% CI ของ P

$P_L < P < P_U$

C.I. of Probability

- **ข้อมูล (Data)**
  - ผลจากการทดลอง n ครั้ง แต่ละการทดลองได้ผลเป็น "สำเร็จ (S)" หรือ "ล้มเหลว (F)"
  - ให้ Y = จำนวนครั้งที่สำเร็จ
- **ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption)**
  - การทดลอง n ครั้งไม่เกิดขึ้นร่วมกัน (Mutually exclusive)
  - ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลสำเร็จในแต่ละการทดลอง = p

C.I. of Probability

- **วิธีการประมาณค่าแบบช่วง**
  - **ใช้ตารางของ Clopper & Pearson** (ตารางที่ 2) สำหรับกรณี
    - $(1-\alpha) = 0.99, 0.98, 0.95, 0.90, 0.80$
    - $n \leq 10$
  - **ใช้กราฟในตารางที่ 4** เมื่อ $(1-\alpha) = 0.99, 0.95$
  - **ใช้ตารางทวินาม (ตารางที่ 1)** เมื่อ
    - $(1-\alpha) \neq 0.99, 0.95$
    - $n \leq 20$
  - **ใช้สูตร large sample approximate** เมื่อ $n \geq 20$

C.I. of Probability

- **ใช้ตารางของ Clopper & Pearson**

ที่ระดับความเชื่อมั่น (1-α)100% ค่าประมาณของ P คือ

$P_L < P < P_U$ หรือ $L < P < U$

โดยที่ ค่า L และ U หาได้จากตารางที่ 2

Table 2 Selected CI for the probability of success

n = 1

B	α	$p_L(\alpha)$	$p_U(\alpha)$
0	.010	.0000	.9950
	.020	.0000	.9900
	.050	.0000	.9750
	.100	.0000	.9500
	...		

n = ขนาดตัวอย่าง

B = Y = จน. Success

$p_L(\alpha)$ = L

$p_U(\alpha)$ = U

C.I. of Probability

- **ตัวอย่าง**

ถ้าสุ่มตัวอย่างน.ศ. มช. มา 8 คน พบว่าเป็นน.ศ.ที่มีภูมิลำเนาใน จ.เชียงใหม่ จำนวน 2 คน จงหาช่วงความเชื่อมั่น 98% ของสัดส่วนของน.ศ.ที่มีภูมิลำเนาอยู่ในเชียงใหม่

ให้ P = สัดส่วนของน.ศ.ที่มีภูมิลำเนาในเชียงใหม่

n = 8, Y = จน.น.ศ. ที่มีภูมิลำเนาในเชียงใหม่ = 2

98% CI ของ P คือ $L < P < U$

โดยที่ ค่า L และ U หาจากตารางที่ 2

Table 2

n = 8

B	α	$p_L(\alpha)$	$p_U(\alpha)$
2	.010	.0137	.7422
	.020	.0197	.7068
	.050	.0319	.6509
	...		

ดังนั้น 98% CI ของ P คือ

$.0197 < P < .7068$

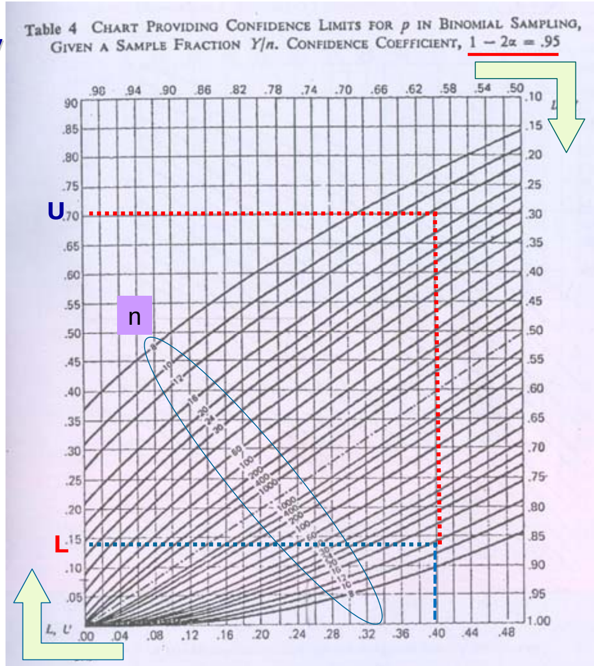
C.I. of Probability

- **ใช้กราฟในตารางที่ 4**
  - เลือกระดับความเชื่อมั่น
  - จาก p = Y/n
    - p<.50 ดูจากด้านล่าง
    - p≥.50 ดูจากด้านบน
  - ลากเส้นตัดเส้นโค้ง n
  - อ่านค่า L และ U

เช่น ที่ n = 12, p = .40

จะได้ L = .14

U = .71



C.I. of Probability

- **ใช้ตารางทวินาม**

  ที่ ขนาดตัวอย่าง = n และ จน. success = Y
  - ประมาณค่า L โดยหาค่า $P(X \le Y-1) = p_1 \approx 1 - \alpha/2$

    จะได้ L = ค่า p ในแถวบนสุดของ p_1
  - ประมาณ U โดยหาค่า $P(X \le Y) = p_2 \approx \alpha/2$

    จะได้ U = ค่า p ในแถวบนสุดของ p_2

Table 1

n	Y	p = .05	.10	.15	…	.75	.80
8	0	.6634	.4305	.2725		.0000	.0000
	1	.9428	.8131	.6572		.0004	.0001
	2	.9942	.9619	.8948		.0042	.0012
	3	.9996	.9950	.9786		.0273	.0104
	…						

เช่น n = 8, Y = 3

ประมาณค่า L = .10

⇒ $P(X \le 2) = .9619$

⇒ $\approx .975$

ประมาณค่า U = .75

⇒ $P(X \le 3) = .0273$

⇒ $\approx .025$

C.I. of Probability

- **ใช้สูตร large sample approximate**

ที่ ขนาดตัวอย่าง = n และ จน. success = Y ดังนั้น p = Y/n

ประมาณค่า L และ U โดย

$$L = p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{หรือ} \quad L = \frac{Y}{n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{Y(n-Y)}{n^3}}$$

$$U = p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{หรือ} \quad U = \frac{Y}{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{Y(n-Y)}{n^3}}$$

ตัวอย่าง

- จากการสุ่มโรงเรียนมัธยม 20 แห่ง เพื่อดูว่ามีมาตรฐานการศึกษาหรือไม่ พบว่า มี 7 แห่งที่มีมาตรฐานที่ดี จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ P โดยที่ P คือสัดส่วนของโรงเรียนทั้งหมดที่มีมาตรฐานที่ดี

ต้องการหา 95% CI ของ P

เมื่อ n = 20, Y = 7

- **ใช้กราฟในตารางที่ 4**

ที่ n = 20,

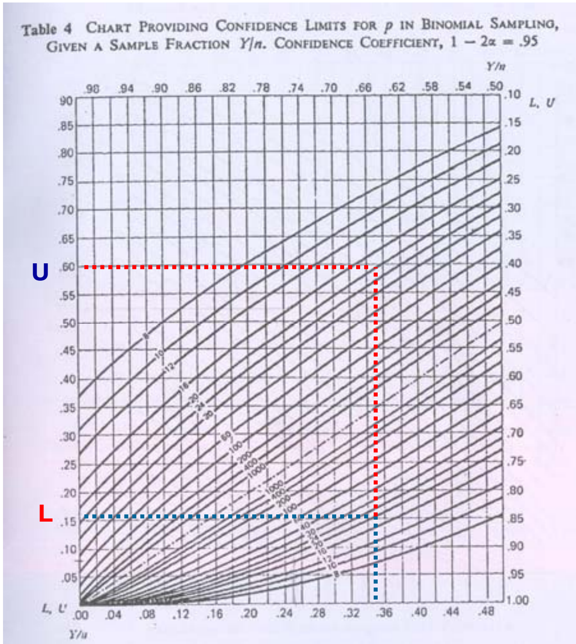
p =7/20= .35

จะได้ L = .15

U = .59

ดังนั้น 95% CI ของ P

.15 < P < .59



C.I. of Probability

- **ใช้ตารางทวินาม**

n = 20, Y = 7

ประมาณค่า L = .15

$\Rightarrow P(X \leq 6)=.9781 \approx .975$

ประมาณค่า U = .60

$\Rightarrow P(X \leq 7)=.0210 \approx .025$

ดังนั้น 95% CI ของ P คือ .15 <P< .60

Table 1

n	Y	p = .05	.10	.15	.20	…	.55	.60
20	…							
	5	.9997	.9887	.9327	.8042		.0064	.0016
	6	1.0000	.9976	.9781	.9133		.0214	.0065
	7	1.0000	.9996	.9941	.9679		.0580	.0210
	…							

C.I. of Probability

- **ใช้สูตร large sample approximate**

ที่ n = 20 และ Y = 7 ดังนั้น p = 7/20 = .35

ประมาณค่า L และ U โดย

$$L = p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = .35 - 1.96\sqrt{\frac{.35(.65)}{20}} = .14$$

$$U = p + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = .35 + 1.96\sqrt{\frac{.35(.65)}{20}} = .56$$

ดังนั้น 95% CI ของ P คือ .14 < P < .56

จากตาราง z ที่ α = .05

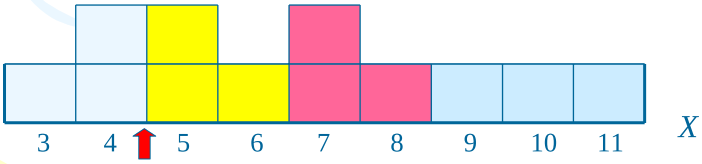
จะได้ $z_{.025}$ = -1.96 และ $z_{.975}$ = 1.96

การทดสอบควอนไทล์ (Quantile test)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการทดสอบที่อาศัยหลักการเดียวกับการทดสอบแบบทวินาม
  - ทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าควอนไทล์ของข้อมูล หรือค่าตำแหน่งของข้อมูล
  - ข้อมูลต้องอยู่ในมาตรวัดเรียงลำดับ

ควอนไทล์ (Quantile)

- เป็นค่าตำแหน่งของข้อมูล ภายใต้การแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ
- เทอมของควอนไทล์ที่รู้จักกันดี
  - median = ค่าที่แบ่งข้อมูลเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน
  - quartile : Q_r = ค่า $X_{r(n+1)/4}$ ที่มีข้อมูลมีค่าต่ำกว่าอยู่ r/4
  - decile : D_r = ค่า $X_{r(n+1)/10}$ ที่มีข้อมูลมีค่าต่ำกว่าอยู่ r/10
  - percentile : P_r = ค่าที่มีข้อมูลมีค่าต่ำกว่าอยู่ r/100



$Q_1 = X_{1(12+1)/4} = X_{3.25} = 4.25$

ควอนไทล์ (Quantile)

สำหรับการคำนวณค่าควอนไทล์ใด ๆ ของตัวแปรสุ่ม X

- ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability density function, pdf) f(x)

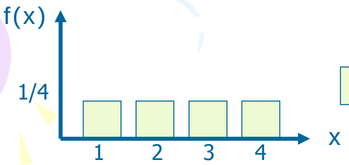
  $$f(x) = P(X = x)$$

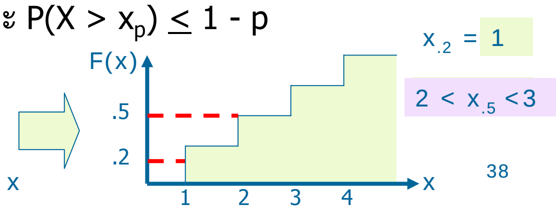
  สามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cummulative distribution function, cdf) F(x)

  $$F(x) = P(X \leq x)$$

- ให้ x_p = ค่าควอนไทล์ที่ p ซึ่งแสดงว่า โอกาสที่ค่าตัวแปรสุ่มมีค่าน้อยกว่า x_p ไม่เกิน p (0 < p < 1) นั่นคือ

  $$P(X < x_p) \leq p \text{ และ } P(X > x_p) \leq 1 - p$$

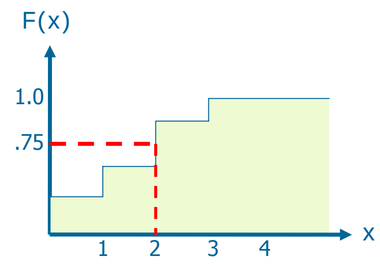




ควอนไทล์ (Quantile)

ตัวอย่าง

x	P(X = x)	F(x)
0	0.25	0.25
1	0.25	0.50
2	0.33	0.83
3	0.17	1.00



$x_{.75} = 2$

- จาก x_p = ค่าควอนไทล์ที่ p ดังนั้น
  $P(X < x_p) \leq p$ และ
  $P(X > x_p) \leq 1 - p$

ตรวจสอบความถูกต้อง

p = 0.75 => 1 – p = 0.25

P(X < 2) = 0.5 (น้อยกว่า p)

P(X > 2) =0.17 (น้อยกว่า 1-p)

Quantile Test

- **ข้อมูล (Data)**
  - ทำการศึกษาในตัวอย่างขนาด n
  - กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ คือค่าของข้อมูล n ตัว
- **ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption)**
  - X_i เป็นตัวอย่างที่ได้จากการสุ่ม
  - มาตรวัดของ X_i อย่างน้อยต้องเป็นมาตรเรียงลำดับ

Quantile Test

- **สมมติฐานทางสถิติ (Statistical hypothesis)**
  - การทดสอบ 2 ทาง (2 tailed test)

$H_0 : X_{p*} = x^*$ vs. $H_1 : X_{p*} \neq x^*$

$H_0 : P(X \leq x^*) \geq p^*$ and $P(X < x^*) \leq p^*$

$H_1 : P(X \leq x^*) < p^*$ or $P(X < x^*) > p^*$

  - การทดสอบทางเดียวด้านมาก

$H_0 : X_{p*} \geq x^*$ (หรือ $X_{p*} = x^*$) vs. $H_1 : X_{p*} < x^*$

$H_0 : P(X < x^*) \leq p^*$ vs. $H_1 : P(X < x^*) > p^*$

  - การทดสอบทางเดียวด้านน้อย

$H_0 : X_{p*} \leq x^*$ (หรือ $X_{p*} = x^*$) vs. $H_1 : X_{p*} > x^*$

$H_0 : P(X \leq x^*) \geq p^*$ vs. $H_1 : P(X \leq x^*) < p^*$

Quantile Test

- **ขยายความสมมติฐานทางสถิติ**
  - การทดสอบทางเดียวด้านน้อย

$H_0 : X_{p*} \leq x^*$ (หรือ $X_{p*} = x^*$) vs. $H_1 : X_{p*} > x^*$

$H_0 : P(X \leq x^*) \geq p^*$ vs. $H_1 : P(X \leq x^*) < p^*$

$P(X > x^*) \leq 1 - p_0$

$p_0 \leq 1 - P(X > x^*)$

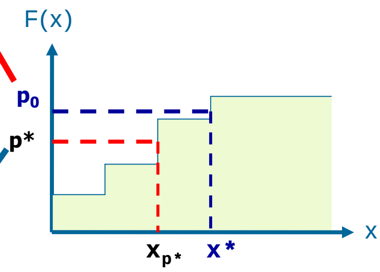
$p_0 \leq P(X \leq x^*)$

ดังนั้น $P(X \leq x^*) \geq p_0$

เนื่องจาก $p_0 \geq p^*$ เสมอ

จะได้ $P(X \leq x^*) \geq p^*$

ภายใต้ H_0



$P(X > x_{p*}) \leq 1 - p^*$

Quantile Test

- **ขยายความสมมติฐานทางสถิติ**
  - การทดสอบทางเดียวด้านมาก

    $H_0 : X_{p^*} \geq x^*$ (หรือ $X_{p^*} = x^*$) vs. $H_1 : X_{p^*} < x^*$

    $H_0 : P(X < x^*) \leq p^*$ vs. $H_1 : P(X < x^*) > p^*$

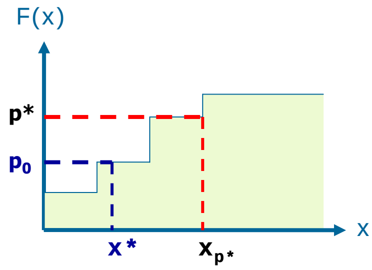
ภายใต้ H_0

$P(X < x_{p^*}) \leq p^*$

$P(X < x^*) \leq p_0$

เนื่องจาก $p_0 \leq p^*$ เสมอ

จะได้ $P(X < x^*) \leq p^*$



Quantile Test

- **สถิติทดสอบ (Statistical Test)**

  T_2 = จำนวนค่าสังเกตซึ่งมีค่าน้อยกว่า x^*

  T_1 = จำนวนค่าสังเกตซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x^*

<u>หมายเหตุ</u>

T_1 จะเท่ากับ T_2 ถ้าไม่มีจำนวนค่าสังเกตที่มีค่าเท่ากับ x^*

Quantile Test

- **อาณาเขตวิกฤต (Critical Regions)**

  ที่ระดับนัยสำคัญ α

  - **กรณีการทดสอบ 2 ทาง (2 tailed test)**

    จะกำหนดค่าวิกฤตทั้งด้านซ้าย (t_1) และขวา (t_2) นั่นคือ

    เขตวิกฤต : $T_1 \le t_1$ หรือ $T_2 > t_2$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \le 20$)**

      ใช้ตารางทวินามที่ค่า p* และ n ทำการพิจารณาค่าที่ทำให้ $\alpha_1 \approx \alpha_2$

      $P(X \le t_1) = \alpha_1$

      และ $P(X > t_2) = \alpha_2$ หรือ $P(X \le t_2) = 1 - \alpha_2$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

      ประมาณค่า $t_1 = np^* + z_{\alpha/2}\sqrt{np^*(1 - p^*)}$ และ

      $t_2 = np^* + z_{1-\alpha/2}\sqrt{np^*(1 - p^*)}$

Quantile Test

- **Critical Regions (ต่อ)**

  - **กรณีการทดสอบทางเดียวด้านมาก**

    จะกำหนดค่าวิกฤตเฉพาะด้านขวา นั่นคือ

    เขตวิกฤต : $T_2 > t_2$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \le 20$)**

      ใช้ตารางทวินามที่ p*, n ทำการพิจารณาค่า

      $P(X > t_2) = \alpha$ หรือ $P(X \le t_2) = 1 - \alpha$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

      ประมาณค่า $t_2 = np^* + z_{1-\alpha}\sqrt{np^*(1-p^*)}$

Quantile Test

- **Critical Regions (ต่อ)**
  - **กรณีการทดสอบทางเดียวด้านน้อย**

    จะกำหนดค่าวิกฤตเฉพาะด้านซ้าย นั่นคือ

    เขตวิกฤต : $T_1 \leq t_1$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 20$)**

      ใช้ตารางทวินามที่ p*, n ทำการพิจารณาค่า

      $P(X \leq t_1) = \alpha$

    - **สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่**

      ประมาณค่า $t_1 = np^* + z_\alpha \sqrt{np^*(1-p^*)}$

ตัวอย่าง 1

ในการสอบเข้ามหาวิทยาลัยเอกชนแห่งหนึ่ง นักเรียนจะต้องทำข้อสอบชุดหนึ่ง ซึ่งใช้ทดสอบมาเป็นเวลาหลายปีแล้ว และเชื่อได้ว่า ควอไทล์ที่ 3 ของคะแนนเป็น 193 ในการสอบครั้งใหม่นี้มีนักเรียนเข้าสอบ 15 คน และได้คะแนนดังนี้ 189, 233, 195, 160, 212, 176, 231, 185, 199, 213, 202, 193, 174, 166, และ 248 จากข้อมูลนี้ จะยังคงกล่าวได้หรือไม่ว่า ควอไทล์ที่ 3 มีค่าเป็น 193 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรอันตรภาค
  - ต้องการทดสอบว่าควอไทลที่ 3 เท่ากับ 193 หรือไม่ นั่นคือ $x_{0.75} = 193$?

ข้อสงสัยคือ $x_{0.75} = 193$?

- **Hypothesis**

  $H_0 : x_{0.75} = 193$

  $H_1 : x_{0.75} \neq 193$

- **Statistical Test**

  T_2 = จำนวนผู้ที่มีคะแนน $< 193 = 6$

  T_1 = จำนวนผู้ที่มีคะแนน $\leq 193 = 7$

  [n=15]

- **Critical Region** กำหนด $\alpha = 0.05$

  ทดสอบ 2 ทาง, $n = 15$, $p^* = .75$

  จากตารางทวินาม

  $P(X \leq 7) = 0.0173$, $P(X \leq 13) = 0.9198$

  เขตวิกฤต คือ $T_1 \leq 7$ หรือ $T_2 > 13$

- **Conclusion**

  จาก T_1 ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ

  ที่ $\alpha = 0.05$ ควอไทล์ที่ 3 มีค่าแตกต่างจาก 193

ตัวอย่าง 2

ในการบันทึกระยะเวลาระหว่างการพุ่งขึ้นของน้ำพุร้อนที่ชื่อ “Old Faithful” 112 ครั้ง เพื่อดูว่ามัธยฐาน (median interval) จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 60 นาที หรือจะมากกว่า 60 นาทีนั้น ปรากฏว่าจาก 112 ครั้งที่น้ำพุ่งขึ้นนั้นมี 8 ครั้ง ที่ระยะเวลาการพุ่งแต่ละครั้งจะ ≤ 60 นาที จากผลการบันทึกนี้ท่านจะสรุปได้อย่างไร ที่ระดับนัยสำคัญ .05

- พิจารณาลักษณะข้อมูล
  - ข้อมูลระยะเวลาการพุ่งของน้ำแต่ละครั้ง อยู่ในมาตรอัตราส่วน
  - ต้องการทดสอบว่ามัธยฐานจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 60 นาทีหรือไม่

    นั่นคือ $x_{0.5} \leq 60$?

ข้อสงสัยคือ $x_{0.5} \leq 60$?

- **Hypothesis**

  $H_0 : x_{0.5} \leq 60$

  $H_1 : x_{0.5} > 60$

  ⇒

  $H_0 : P(X \leq 60) \geq 0.5$

  $H_1 : P(X \leq 60) < 0.5$

- **Statistical Test**

  T_1 = จำนวนครั้งที่ระยะเวลาการพุ่ง $\leq$ 60 นาที

  = 8 **[n=112]**

- **Hypothesis**

  $H_0 : P(X \leq 60) \geq 0.5$

  $H_1 : P(X \leq 60) < 0.5$

- **Statistical Test**

  $T_1 = 8$

- **Critical Region** กำหนด $\alpha = 0.05$

  ทดสอบทางเดียวด้านน้อย, n = 112, p* = .5

  ประมาณ $t_1 = np^* - z_{1-\alpha}\sqrt{np^*(1-p^*)}$

  $t_1 = 112(.5) - 1.645\sqrt{112(.5)(.5)} = 47.30$

  เขตวิกฤต คือ $T_1 \leq 47.30$

- **Conclusion**

  จาก T_1 ตกในเขตวิกฤต จึง **Reject H_0** นั่นคือ

  ที่ $\alpha = 0.05$ มัธยฐานของระยะเวลาการพุ่งมากกว่า 60 นาที

ช่วงความเชื่อมั่นของควอนไทล์ (Confidence Interval for a Quantile)

- **จุดเด่น**
  - เป็นการประมาณค่าแบบช่วงของค่าควอนไทล์ที่ p* (X_{p*}) เมื่อ p* เป็นค่าคงที่ใด ๆ ($0 < p^* < 1$)
  - ใช้กับข้อมูลมาตรวัดเรียงลำดับ

Population

$X_{p*} = ?$

Sample

x_{p*}

$(1-\alpha)100\%$ CI ของ X_{p*}

$X^{(r)} < X_{p*} < X^{(s)}$

C.I. of Quantile (X_{p*})

- **ข้อมูล (Data)**
  - ค่าตัวแปรสุ่ม $X_1, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน (iid random variable)
  - ทำการเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามาก โดยให้ $X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq \ldots \leq X^{(r)} \leq \ldots \leq X^{(s)} \leq \ldots \leq X^{(n)}$
- **ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption)**
  - ข้อมูล $X_1, \ldots, X_n$ ได้จากมาอย่างสุ่ม
  - ข้อมูลอย่างน้อยต้องอยู่ในมาตรเรียงลำดับ

C.I. of Quantile (X_{p*})

- **วิธีการประมาณ C.I. of quantile**
  - $(1-\alpha)100\%$ CI ของ X_{p*} คือ $\mathbf{X^{(r)} \leq X_{p*} \leq X^{(s)}}$
    โดย $P(X^{(r)} \leq X_{p*} \leq X^{(s)}) = 1 - \alpha$
  - ทำการเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามาก โดยให้
    $X^{(1)} \leq \ldots \leq X^{(r)} \leq \ldots \leq X^{(s)} \leq \ldots \leq X^{(n)}$
  - คำนวณ**ค่าตำแหน่ง r และ s**
  - ค่าของข้อมูลที่ตำแหน่ง r คือ $X^{(r)}$ เป็นค่า lower limit
  - ค่าของข้อมูลที่ตำแหน่ง s คือ $X^{(s)}$ เป็นค่า upper limit

C.I. of Quantile (X_{p*})

- **หาตำแหน่ง r และ s โดยใช้ตารางทวินาม ($n \leq 20$)**
  ที่ ขนาดตัวอย่าง = n และ Prob. of success (p) = p*
  - ประมาณค่า r โดยหาค่า $P(X \leq r - 1) = \alpha/2$
  - ประมาณค่า s โดยหาค่า $P(X \leq s - 1) = 1 - \alpha/2$

Table 1

n	Y	p = .05	.10	.15	…	.75	.80
8	0	.6634	.4305	.2725		.0000	.0000
	1	.9428	.8131	.6572		.0004	.0001
	2	.9942	.9619	.8948		.0042	.0012
	3	.9996	.9950	.9786		.0273	.0104
	…						
	7	1.0000	1.000	1.000		.8999	.8322
	8	1.0000	1.000	1.000		1.000	1.000

เช่น ที่ $1 - \alpha = .95$
$n = 8$, $p^* = .75$
ประมาณค่า r = 4
$\Rightarrow P(X \leq 3) = .0273$
$\Rightarrow \approx .025$
ประมาณค่า s = 8
$\Rightarrow P(X \leq 7) = .8999$
$\Rightarrow \approx .975$

C.I. of Quantile (X_{p*})

- **หา r และ s โดยใช้สูตรกรณี n ขนาดใหญ่**

ที่ ขนาดตัวอย่าง = n และ prob. of success = p*

คำนวณค่า r* และ s* โดย

$$r^* = np^* + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

$$s^* = np^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

r = round(r*)

s = round(s*)

round คือการปรับตัวเลขทศนิยมให้เป็นเลขจำนวนเต็ม

C.I. of Quantile (X_{p*})

- **วิธีการประมาณ one-sided C.I. of quantile**
  - Left one-sided C.I. of quantile
    (1-α)100% CI ของ X_{p*} คือ $X_{p*} \geq X^{(r)}$
    โดย $P(X^{(r)} \leq X_{p*}) = 1 - \alpha$
  - Right one-sided C.I. of quantile
    (1-α)100% CI ของ X_{p*} คือ $X_{p*} \leq X^{(s)}$
    โดย $P(X_{p*} \leq X^{(s)}) = 1 - \alpha$

ตัวอย่าง

ในการสุ่มเลือกหลอดวิทยุจำนวน 16 หลอด ทำการทดสอบและบันทึกจำนวนชั่วโมงที่ใช้งานจนกระทั่งหลอดขาด ได้ผลดังนี้

$X^{(1)} = 46.9$	$X^{(5)} = 56.8$	$X^{(9)} = 63.3$	$X^{(13)} = 67.1$
$X^{(2)} = 47.2$	$X^{(6)} = 59.2$	$X^{(10)} = 63.4$	$X^{(14)} = 67.7$
$X^{(3)} = 49.1$	$X^{(7)} = 59.9$	$X^{(11)} = 63.7$	$X^{(15)} = 73.3$
$X^{(4)} = 56.5$	$X^{(8)} = 63.28$	$X^{(12)} = 64.1$	$X^{(16)} = 78.5$

จงหาช่วงความเชื่อมั่นของควอไทล์ที่ 3 โดยใช้สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่นใกล้เคียง 90%

- **พิจารณาลักษณะข้อมูล**
  - ข้อมูลอยู่ในมาตรอัตราส่วน
  - ต้องการประมาณค่าแบบช่วงของควอไทลที่ 3 (Q_3 หรือ $X_{.75}$)

- 90% CI ของ $X_{.75}$ คือ $\Rightarrow 63.3 < X_{.75} < 73.3$
  - หาค่าตำแหน่ง r และ s

    เนื่องจาก n = 16 ใช้ตารางทวินาม => p* = .75
    - $P(X \le 8) = .0271 \approx .05$ $\Rightarrow$ r = 8 + 1 = 9
    - $P(X \le 14) = .9365 \approx .95$ $\Rightarrow$ s = 14 + 1 = 15
  - หาค่า $X^{(r)}$ และ $X^{(s)}$ จากข้อมูล $\Rightarrow X^{(r)} = X^{(9)} = 63.3$

    $\Rightarrow X^{(s)} = X^{(15)} = 73.3$

Table 1

n	Y	p = .05	…	.75	.80
16	0			.0000	
	…			…	
	7			.0075	
	8			.0271	
	…				
	14			.9365	
	15			.9900	

ลองใช้สูตรกรณี n > 20

$$r^* = np^* + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

= 9.14 $\Rightarrow$ r = 10

$$s^* = np^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np^*(1-p^*)}$$

= 14.86 $\Rightarrow$ s = 15