5 การอนุมาน ความแปรปรวนประชากร

กระบวนวิชา 208263: สถิติเบื้องต้น
โดย... ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วัตถุประสงค์

- นักศึกษาสามารถทำการอนุมานค่าความแปรปรวน 1 กลุ่ม และ 2 กลุ่มได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

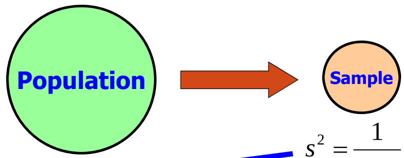
เนื้อหา

- บทนำ
- การอนุมานค่าความแปรปรวน 1 กลุ่ม
  - การแจกแจงค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง
  - การประมาณค่า
  - การทดสอบสมมติฐาน
- การอนุมานค่าความแปรปรวน 2 กลุ่ม
  - การแจกแจงค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง
  - การประมาณค่า
  - การทดสอบสมมติฐาน

Introduction

- **ความแปรปรวน**

เป็นค่าที่แสดงลักษณะการกระจายของข้อมูลจากค่าเฉลี่ย



$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2$$

สถิติอนุมาน

สถิติวิเคราะห์เชิงอนุมาน

- **Estimation –** ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์
  - ➢point estimate
  - ➢interval estimate
- **Hypothesis testing –** ทำการทดสอบเกี่ยวกับพารามิเตอร์
  - โดยการสมมติให้พารามิเตอร์มีค่าเป็นค่าคงที่ที่สนใจ
  - ทำการทดสอบว่าข้อสมมตินั้นเป็นจริงหรือไม่ โดยพิจารณาจากข้อมูลที่มี

ความสำคัญของการอนุมานค่าความแปรปรวน

ในงานวิจัยสาขาต่าง ๆ มักให้ความสำคัญกับค่าความแปรปรวน หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของข้อมูลพอ ๆ กับค่าเฉลี่ย เช่น

- **อุตสาหกรรมการผลิต**

ในการผลิตหลอดไฟโดยใช้เครื่องจักร 2 ตัว พบว่า

อายุการใช้งาน (ชั่วโมง)	เครื่องจักร A	เครื่องจักร B
ค่าเฉลี่ย	30000	30002
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	200	1000

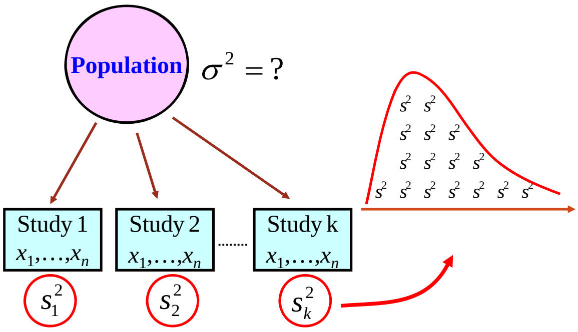
บริษัทควรเลือกใช้เครื่องจักร A หรือ B?

การอนุมานเกี่ยวกับค่าความแปรปรวน 1 กลุ่ม

- **Point and Interval Estimate**
- **Hypothesis Testing**

ในการอนุมานเกี่ยวกับค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) จำเป็นต้องอาศัยการแจกแจงของความแปรปรวนตัวอย่าง (s^2)

การแจกแจงความแปรปรวนตัวอย่าง



การแจกแจงความแปรปรวนตัวอย่าง

- จาก X คือตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีความแปรปรวน = σ^2
- หากทำการสุ่มตัวอย่างมาขนาด n ซึ่งมีความแปรปรวน = s^2 จะพบว่า

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{v=n-1}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

การแจกแจงแบบไคสแควร์

ดังนั้นจะใช้ตัวสถิติ χ^2 ช่วยในการอนุมานค่าความแปรปรวนของประชากร

การแจกแจงของไคสแควร์ (Chi-square dist.)

- ลักษณะโค้งการแจกแจงเป็นโค้งระฆังคว่ำเบ้ขวา
- พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมด = 1
- ค่าไคสแควร์มีค่าเป็น + เท่านั้น
- สามารถใช้ตารางสำเร็จรูปในการคำนวณค่าไคสแควร์ ตารางที่ 5 ในหน้าที่ 310 – 313 (ภาคผนวก)

$$\chi^2_{p,v=n-1}$$

$$P(\chi^2 \le \chi^2_{p,v}) = p$$

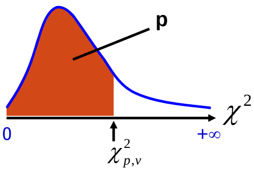
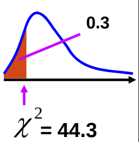


Table 5 Cumulative Chi-square Distribution

v	p: 0.0005	0.001	0.005	0.01	…	0.30	0.40
1	0.0^6393	0.0^5157	0.0^4393	0.0^3157	…	0.148	0.275
2	0.0^2100	0.0^2200	0.0100	0.0201	…	0.713	1.02
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.115	…	1.42	1.87
4	0.0639	0.0908	0.207	0.297	…	2.19	2.75
5	0.158	0.210	0.412	0.554	…	3.00	3.66
…	…	…	…	…	…	…	…
50	23.5	24.7	28.0	29.7	…	44.3	46.9

$\chi^2_{0.30,v=50} = ?$



$\chi^2 = 44.3$

Table 5 (p 311)

v	p: 0.50	0.60	0.70	0.80	…	0.999	0.9995
1	0.455	0.708	1.07	1.64	…	10.8	12.1
…	…	…	…	…	…	…	…
50	49.3	51.9	54.7	58.2	…	86.7	89.6

(p 312)

v	p: 0.0005	0.001	0.005	0.01	…	0.40	0.50
51	24.1	25.4	28.7	30.5	…	47.8	50.3
52	24.8	26.1	29.5	31.2	…	48.8	51.3
…	…	…	…	…	…	…	…
100	59.9	61.9	67.3	70.1	…	95.8	99.3

(p 313)

v	p: 0.60	0.70	0.80	0.90	…	0.999	0.9995
51	52.9	55.8	59.2	64.3	…	88.0	90.9
…	…	…	…	…	…	…	…
100	102.9	106.9	111.7	118.5	…	149.4	153.2

ตัวอย่าง

- จงหาค่า χ^2 ต่อไปนี้
  ก. $\chi^2_{0.99,\,10}$
  ข. $\chi^2_{0.10,\,5}$

ก. $\chi^2_{0.99,\,10}$ = 23.2

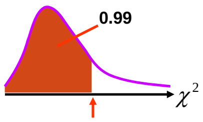


Table 5
(p 311)

	p				
v	0.50	...	0.975	0.99	...
...	...	...	...	...	...
10	9.34	...	20.5	23.2	...
...	...	...	...	...	...

13

ข. $\chi^2_{0.10,\,5}$ = 1.61

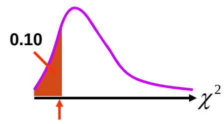


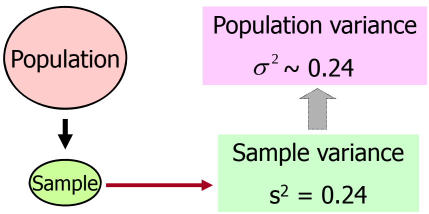
Table 5
(p 310)

	p				
v	0.0005	...	0.10	...	0.40
1	0.0^6393	...	0.0158	...	0.275
...	...	...	...	...	...
5	0.158	...	1.61	...	3.66
...	...	...	...	...	...

14

การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

- ใช้ค่า sample variance สำหรับประมาณค่าแบบจุดของ population variance



15

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

$(1-\alpha)100\%$ ช่วงความเชื่อมั่น (CI) ของความแปรปรวน

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}$$

16

ตัวอย่างที่ 2

- สุ่มตัวอย่างหลอดไฟ 61 หลอด ที่ผลิตจากโรงงานหนึ่ง คำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานของหลอดไฟได้เป็น 100 ชั่วโมง
  จงหาช่วงความเชื่อมั่น 99% ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้งหมดที่โรงงานนี้ผลิตได้

ต้องการให้ทำการ**ประมาณค่าแบบช่วง**ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

17

n

- สุ่มตัวอย่างหลอดไฟ 61 หลอด ที่ผลิตจากโรงงานหนึ่ง คำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานของหลอดไฟได้เป็น 100 ชั่วโมง

s

จงหาช่วงความเชื่อมั่น 99% ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้งหมดที่โรงงานนี้ผลิตได้

ให้ σ = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานหลอดไฟ

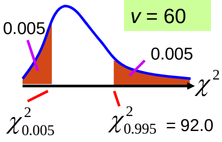
99% CI ของ σ^2 คือ
$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}$$

s^2 = ความแปรปรวนของอายุการใช้งานหลอดไฟของกลุ่มตัวอย่าง
= 100^2

18

99% CI ของ σ^2 คือ $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}$

$\alpha = 0.01$ n = 61 v = 60



$$\frac{(61-1)100^2}{92} < \sigma^2 < \frac{(61-1)100^2}{35.5}$$

$$6521.74 < \sigma^2 < 16901.41$$

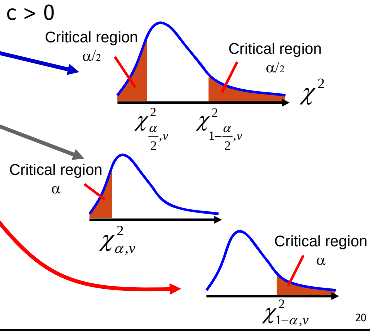
$$\sqrt{6521.74} < \sigma < \sqrt{16901.41}$$

$$80.8 < \sigma < 130$$

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานหลอดไฟอยู่ในช่วง 80.8 ถึง 130 ชั่วโมง

การทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing)

- สมมติฐานทางสถิติ
  - $H_0 : \sigma^2 = c$ เมื่อ c > 0
    $H_1 : \sigma^2 \neq c$
  - $H_0 : \sigma^2 = c$
    $H_1 : \sigma^2 < c$
  - $H_0 : \sigma^2 = c$
    $H_1 : \sigma^2 > c$
- เขตวิกฤต ที่ α



- สถิติทดสอบ

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

ทดลองทำ

- ตามเกณฑ์มาตรฐานกำหนดว่า เครื่องมือที่ใช้วัดความดันโลหิตต้องมีค่าความแปรปรวนไม่เกิน 10 mmHg
  ต้องการทดสอบว่าเครื่องมือ A เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้หรือไม่
  จงตั้งสมมติฐานทางสถิติเพื่อทำการทดสอบ

ก) $H_0: \sigma^2 = 10$ vs $H_1: \sigma^2 \neq 10$
ข) $H_0: \sigma^2 = 10$ vs $H_1: \sigma^2 > 10$
ค) $H_0: \sigma^2 = 10$ vs $H_1: \sigma^2 < 10$
ง) $H_0: \sigma^2 = 10$ vs $H_1: \sigma^2 \leq 10$

ทดลองทำ

- ต้องการทดสอบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักทารกแรกเกิดเท่ากับ 100 g หรือไม่
  จงตั้งสมมติฐานทางสถิติเพื่อทำการทดสอบ

ก) $H_0: \sigma = 100$ vs $H_1: \sigma \neq 100$
ข) $H_0: \sigma = 100$ vs $H_1: \sigma > 100$
ค) $H_0: \sigma^2 = 10000$ vs $H_1: \sigma^2 \neq 10000$
ง) $H_0: \sigma^2 = 10000$ vs $H_1: \sigma^2 > 10000$

ตัวอย่างที่ 3

- ให้ X เป็นคะแนนสอบกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นของนักศึกษา ถ้าสุ่มตัวอย่างนักศึกษาที่สอบกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นในรุ่นนี้ จำนวน 21 คน ได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 12 คะแนน

จงทดสอบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักศึกษาทั้งหมดที่เรียนกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นจะมากกว่า 8 คะแนนหรือไม่ โดยใช้ระดับนัยสำคัญ 10%

ต้องการให้ทำการ**ทดสอบสมมติฐาน**

ให้ X เป็นคะแนนสอบกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นของนักศึกษา ถ้าสุ่มตัวอย่างนักศึกษาที่สอบกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นในรุ่นนี้ จำนวน 21 คน ได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 12 คะแนน s n จงทดสอบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักศึกษาทั้งหมดที่เรียนกระบวนวิชาสถิติเบื้องต้นจะมากกว่า 8 คะแนนหรือไม่ โดยใช้ระดับนัยสำคัญ 10% $\alpha = 0.10$

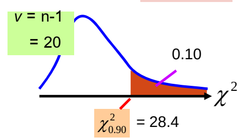
คำถาม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน > 8 ?

ให้ σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
ดังนั้นต้องการทดสอบ $\sigma > 8$? (or $\sigma^2 > 8^2$?)

สมมติฐานทางสถิติ $H_0 : \sigma^2 = 64$
$H_1 : \sigma^2 > 64$

สถิติทดสอบ $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

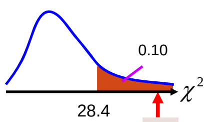
เขตวิกฤต $X^2 > 28.4$



สมมติฐานทางสถิติ $H_0 : \sigma^2 = 64$

$H_1 : \sigma^2 > 64$

เขตวิกฤต $X^2 > 28.4$



สถิติทดสอบ $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

คำนวณค่าสถิติทดสอบ n = 21, s = 12 ดังนั้น $s^2 = 12^2$

ภายใต้ $H_0 : \sigma^2 = 64$

$$\chi_c^2 = \frac{(21-1)144}{64} = 45$$

สรุปผล Reject $H_0 : \sigma^2 = 64$

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนมากกว่า 8 คะแนน

25

การอนุมานเกี่ยวกับค่าความแปรปรวน 2 กลุ่ม

- **Point and Interval Estimate**
- **Hypothesis Testing**

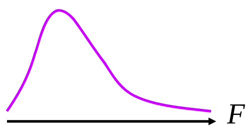
ในการอนุมานเกี่ยวกับค่าความแปรปรวนของประชากร 2 กลุ่ม มักสนใจเกี่ยวกับค่าอัตราส่วนระหว่างความแปรปรวน 2 กลุ่ม (σ_1^2/σ_2^2) ซึ่งต้องทราบลักษณะ**การแจกแจงของอัตราส่วนความแปรปรวนตัวอย่าง 2 กลุ่ม (s_1^2/s_2^2)**

26

การแจกแจงความแปรปรวนตัวอย่าง 2 กลุ่ม

- จาก X_1, X_2 คือตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าความแปรปรวน = σ_1^2, σ_2^2
- หากทำการสุ่มตัวอย่างมาขนาด n_1, n_2 ซึ่งมีค่าความแปรปรวน s_1^2, s_2^2 จะพบว่า

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{v_1=n_1-1, v_2=n_2-1}$$



การแจกแจงแบบเอฟ

$$F = \frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2}$$

ดังนั้นจะใช้ตัวสถิติ F ช่วยในการอนุมานค่าอัตราส่วนความแปรปรวนของประชากร 2 กลุ่ม

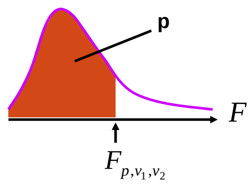
27

การแจกแจงของเอฟ (F distribution)

- ลักษณะโค้งการแจกแจงเป็นโค้งระฆังคว่ำเบ้ขวา
- พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมด = 1
- ค่าเอฟมีค่าเป็น + เท่านั้น
- สามารถใช้ตารางสำเร็จรูปในการคำนวณค่าเอฟ ตารางที่ 6 ในหน้าที่ 314 – 318 (ภาคผนวก)

$$F_{p, v_1=n_1-1, v_2=n_2-1}$$

$$P(F \le F_{p,v_1,v_2}) = p$$



28

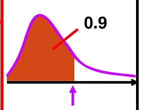
Table 6 Cumulative F Distribution

F(F) = ... = .90 — p

v_1 (m), v_2 (n)

n \ m	1	2	3	4	...	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	...	63.06	63.33
2	8.53	9.90	9.16	9.24	...	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	...	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	...	3.78	3.76
...	...	...	...	...	...	...	...
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	...	1.17	1.00

$F_{0.90,4,3} = ?$



F = 5.34

29

Table 6 (p 315) F(F) = ... = .95

n \ m	1	2	...	∞
1	161.4	199.5	...	254.3
...	...	...	...	...
∞	3.84	3.00	...	1.00

(p 316) F(F) = ... = .975

n \ m	1	2	...	∞
1	647.8	799.5	...	1018
...	...	...	...	...
∞	5.02	3.69	...	1.00

(p 317) F(F) = ... = .99

n \ m	1	2	...	∞
1	4052	4999.5	...	6366
...	...	...	...	...
∞	6.63	4.61	...	1.00

(p 318) F(F) = ... = .995

n \ m	1	2	...	∞
1	16211	20000	...	25465
...	...	...	...	...
∞	7.88	5.30	...	1.00

30

ตัวอย่างที่ 4

- จงหาค่า F ต่อไปนี้

  ก. $F_{0.99,\ 10,\ 12}$

  ข. $F_{0.10,\ 5,\ 9}$

ก. $F_{0.99,\ 10,\ 12}$ = 4.30

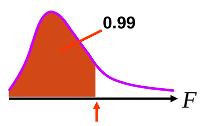


Table 6 (p 317) F(F) = …… = .99

n \ m	1	2	...	10	...	∞
1	4052	4999.5	...	24224	...	6366
...	...	...	...	...	...	...
12	9.33	6.93	...	4.30	...	3.36
...	...	...	...	...	...	...

$$F_{p,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{1-p,\nu_2,\nu_1}}$$

เมื่อ p = {0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005}

- จงหาค่า F ต่อไปนี้

  ก. $F_{0.99,\ 10,\ 12}$

  ข. $F_{0.10,\ 5,\ 9}$

ข. $F_{0.10,\ 5,\ 9}$ = 1/$F_{0.9,\ 9,\ 5}$

= 1/3.32 = 0.3

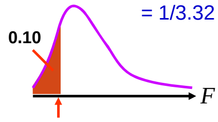
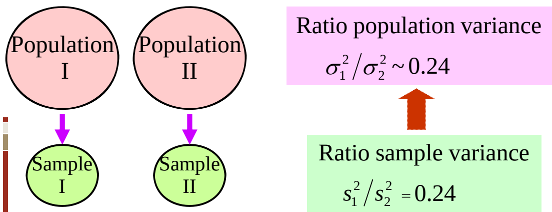


Table 6 (p 314) F(F) = …… = .90

n \ m	1	2	...	9	...	∞
1	39.86	49.50	...	59.86	...	63.33
...	...	...	...	...	...	...
5	4.06	3.78	...	3.32	...	3.10
...	...	...	...	...	...	...

การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

- ใช้ค่า ratio of sample variance สำหรับประมาณค่าแบบจุดของ ratio of population variance



การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

(1 - α)100% ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval, CI) ของอัตราส่วนความแปรปรวน 2 กลุ่ม

$$\frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}}$$

ตัวอย่างที่ 5

โรงงานผลิตอาหารกระป๋องแห่งหนึ่ง ต้องการศึกษาความแปรปรวนของน้ำหนักสุทธิที่แท้จริงในกระป๋องซึ่งบรรจุโดยใช้เครื่องจักร ก. และเครื่องจักร ข. จึงได้สุ่มตัวอย่างอาหารกระป๋องที่บรรจุโดยเครื่องจักร ก. และเครื่องจักร ข. ได้ข้อมูลดังนี้

	เครื่องจักร ก	เครื่องจักร ข
จำนวนอาหารกระป๋องตัวอย่าง (กระป๋อง)	10	12
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักอาหารกระป๋อง(g)	10	8

จงหาขอบเขตที่เชื่อมั่นได้ 98% ของอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักอาหารที่บรรจุในแต่ละกระป๋อง เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการบรรจุอาหารกระป๋องให้ได้น้ำหนักตามที่กำหนดของเครื่องจักร ก และ ข

ต้องการให้ทำการ**ประมาณค่าแบบช่วง**

	เครื่องจักร ก	เครื่องจักร ข
จำนวนอาหารกระป๋องตัวอย่าง	10 n_1	12 n_2
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	10 s_1	8 s_2

จงหาขอบเขตที่เชื่อมั่นได้ 98% ของอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักอาหารที่บรรจุในแต่ละกระป๋อง เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการบรรจุอาหารกระป๋องให้ได้น้ำหนักตามที่กำหนดของเครื่องจักร ก และ ข

σ_1 = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนน.อาหารของเครื่อง ก

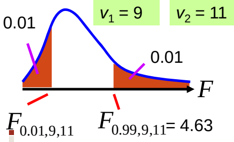
σ_2 = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนน.อาหารของเครื่อง ข

98% CI ของ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ คือ $\frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}}$

98% CI ของ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ คือ $\frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 . F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}}$

$\alpha = 0.02$

$n_1 = 10$, $\nu_1 = 9$ $\quad$ $n_2 = 12$, $\nu_2 = 11$



$F_{0.01,9,11}$ $\quad$ $F_{0.99,9,11}$= 4.63

= 1/$F_{0.99,\ 11,\ 9}$

= 1/5.185 = 0.19

$$\frac{10^2}{8^2(4.63)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{10^2}{8^2(0.19)}$$

$$0.337 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 8.102$$

$$\sqrt{0.337} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \sqrt{8.102}$$

$$0.5805 < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 2.8464$$

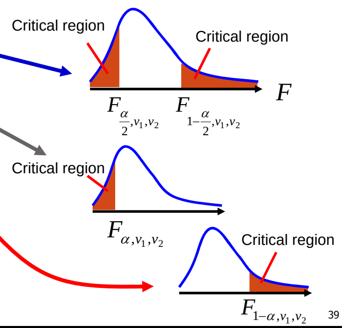
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 98% ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราส่วนน้ำหนักอาหารของเครื่องทั้ง 2 อยู่ในช่วง 0.58 ถึง 2.85 กรัม

ค่า F จากตาราง กรณีค่า d.f. ไม่มีในตาราง

- $F_{0.99,11,9}$ = 5.178
  $\Rightarrow F_{0.01,\ 9,\ 11}$ = 1/5.178 = 0.193
- $F_{0.99,\ 11,\ 9}$ (~ $F_{0.99,\ 12,\ 9}$ = 5.11)
  $\Rightarrow F_{0.01,\ 9,\ 11}$ = 1/5.11 = 0.196
- $F_{0.99,\ 11,\ 9}$ (~ $F_{0.99,\ 10,\ 9}$ = 5.26)
  $\Rightarrow F_{0.01,\ 9,\ 11}$ = 1/5.26 = 0.190

การทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing)

- **สมมติฐานทางสถิติ**
  - $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = c$
    $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq c$
  - $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = c$
    $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 < c$
  - $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = c$
    $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > c$
- **เขตวิกฤต** ที่ α



$F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$ $\quad$ $F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$ $\quad$ F_{α,ν_1,ν_2} $\quad$ $F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}$

- **สถิติทดสอบ**

$$F = \frac{s_1^2 . \sigma_2^2}{s_2^2 . \sigma_1^2}$$

ทดลองทำ

- ต้องการทดสอบว่าความแปรปรวนของระดับความดันโลหิตที่ตรวจวัดโดยเครื่องมือ A แตกต่างจากเครื่องมือ B หรือไม่

จงตั้งสมมติฐานทางสถิติเพื่อทำการทดสอบ

ก) H_0: $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ vs H_1: $\sigma^2_A > \sigma^2_B$
ข) H_0: $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ vs H_1: $\sigma^2_A \neq \sigma^2_B$
ค) H_0: $\sigma^2_A/\sigma^2_B = 1$ vs H_1: $\sigma^2_A/\sigma^2_B \neq 1$
ง) H_0: $\sigma^2_A - \sigma^2_B = 0$ vs H_1: $\sigma^2_A - \sigma^2_B \neq 0$

ทดลองทำ

- ต้องการทดสอบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักทารกแรกเกิดที่มารดาฟังดนตรีคลาสสิคระหว่างตั้งครรภ์เป็น 2 เท่าของกลุ่มไม่ได้ฟัง

จงตั้งสมมติฐานทางสถิติเพื่อทำการทดสอบ

ก) H_0: $\sigma_1 = 2\sigma_2$ vs H_1: $\sigma_1 \neq 2\sigma_2$
ข) H_0: $\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2$ vs H_1: $\sigma_1^2 \neq 2\sigma_2^2$
ค) H_0: $\sigma_1/\sigma_2 = 2$ vs H_1: $\sigma_1/\sigma_2 \neq 2$
ง) H_0: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 4$ vs H_1: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 4$

ตัวอย่างที่ 6

- ร้านจำหน่ายเสื้อผ้าสั่งซื้อผ้าโทเรสีขาวจากโรงงาน ก และ ข เป็นประจำ เพื่อเย็บเสื้อนักเรียนสำเร็จรูปจำหน่าย ถ้าผ้าโทเรที่สั่งซื้อจากโรงงาน ก และ ข มีราคาเท่ากัน เพื่อประกอบการตัดสินใจว่าควรจะเลือกซื้อผ้าโทเรสีขาวจากโรงงาน ก หรือ ข ในคราวต่อไป จึงได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบความแปรปรวนของความทนทานของผ้าทั้ง 2 โรงงาน โดยสำรวจผ้าโทเรสีขาวที่สั่งซื้อมา ได้ข้อมูลดังนี้

	โรงงาน ก	โรงงาน ข
จำนวนผ้า (พับ)	15	21
ความแปรปรวนของความทนทานของผ้า (กก^2)	25	35

สรุปได้หรือไม่ว่าความทนทานของผ้าโทเรสีขาวที่ทอจากโรงงาน ก มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยกว่าผ้าจากโรงงาน ข ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

ต้องการให้ทำการทดสอบสมมติฐาน

	โรงงาน ก	โรงงาน ข
จำนวนผ้า	15	21
ความแปรปรวน (กก²)	25	35

$\nu_1 = n_1 - 1 = 14$ $\nu_2 = n_2 - 1 = 20$

สรุปได้หรือไม่ว่าความทนทานของผ้าโทเรสีขาวที่ทอจากโรงงาน ก มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยกว่าผ้าจากโรงงาน ข ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

$\alpha = 0.10$

คำถาม ผ้า ก. มี sd. ของความทนทานน้อยกว่าผ้า ข. ?

ให้ σ_1 คือ sd ของความทนทานผ้า ก. และ σ_2 คือ sd ผ้า ข.

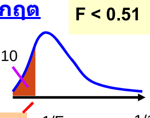
ดังนั้นต้องการทดสอบ $\sigma_1 < \sigma_2$? $(\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$

สมมติฐานทางสถิติ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

สถิติทดสอบ $F = \dfrac{s_1^2 . \sigma_2^2}{s_2^2 . \sigma_1^2}$

เขตวิกฤต **F < 0.51**



$F_{0.10,14,20} = 1/F_{0.9,20,14} = 1/1.96 = 0.51$

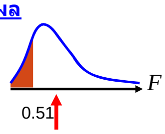
	โรงงาน ก	โรงงาน ข
จำนวนผ้า	15 n_1	21 n_2
ความแปรปรวน (กก²)	25 s_1^2	35 s_2^2

คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$F = \dfrac{s_1^2 . \sigma_2^2}{s_2^2 . \sigma_1^2} = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{25}{35} = 0.72$

ภายใต้ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

สรุปผล



Accept $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความทนทานผ้าทั้ง 2 ไม่แตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 7

- บริษัทแห่งหนึ่งต้องการที่จะซื้อยางรถยนต์ชนิดหนึ่ง ซึ่งมีผู้เสนอขาย 2 ชนิด เพื่อใช้ในรถบรรทุกสินค้าของบริษัท ผู้จัดการของบริษัทแห่งนี้คิดว่า โดยเฉลี่ยแล้วระยะทางการใช้งานของยางรถยนต์ชนิด ก มากกว่าระยะทางการใช้งานของยางชนิด ข เพื่อช่วยในการตัดสินใจจึงได้ทดลองใช้ยางทั้ง 2 ชนิด ๆ ละ 16 เส้น โดยใช้ในรถบรรทุกที่วิ่งในสภาพเดียวกันจนกระทั่งยางเสื่อมสภาพ วัดระยะทางที่วิ่งได้ดังนี้

ยางชนิด ก : ค่าเฉลี่ย 41,600 กม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 6,720 กม.

ยางชนิด ข : ค่าเฉลี่ย 40,000 กม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4,480 กม.

จงสรุปผลว่าเป็นไปตามที่กรรมการผู้จัดการของบริษัทนี้คิดไว้หรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 5%

ต้องการให้ทำการทดสอบสมมติฐาน

คำถาม ระยะทางเฉลี่ยของการใช้งานยาง ก. มากกว่ายาง ข. ?

ให้ μ_1 คือ ระยะทางเฉลี่ยของยาง ก. และ

μ_2 คือ ระยะทางเฉลี่ยของยาง ข.

ดังนั้นต้องการทดสอบ μ_1 - μ_2 ?

สมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

สถิติทดสอบ

- ทราบค่า σ_1^2, σ_2^2 ? ไม่ทราบ
- ขนาดตัวอย่าง ขนาดเล็ก
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$? ต้องทดสอบ

	ยาง ก	ยาง ข
n	16	16
$\bar{x}$	41600	40000
s	6720	4480

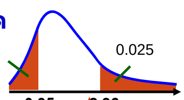
ทดสอบ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$F = \dfrac{s_1^2 . \sigma_2^2}{s_2^2 . \sigma_1^2} = \dfrac{6720^2}{4480^2} = 2.25$

เขตวิกฤต



Accept $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

	ยาง ก	ยาง ข
n	16	16
$\bar{x}$	41600	40000
s	6720	4480

สมมติฐานทางสถิติ $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

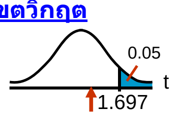
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

สถิติทดสอบ

- ทราบค่า σ_1^2, σ_2^2 ? ไม่ทราบ
- ขนาดตัวอย่าง ขนาดเล็ก
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$? ไม่แตกต่าง

$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = 0.79$

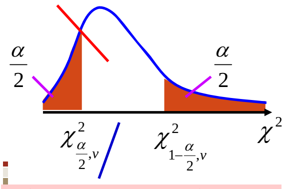
เขตวิกฤต



Accept $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

การประมาณค่าแบบช่วงความแปรปรวน 1 กลุ่ม

(1 - α)100% Confidence Interval of variance



$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v} < \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}\right) = 1-\alpha$$

แทนค่า $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}\right) = 1-\alpha$$

เทอมซ้ายมือ

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}$$

เทอมขวามือ

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2$$

$$P\left(\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}}\right) = 1-\alpha$$

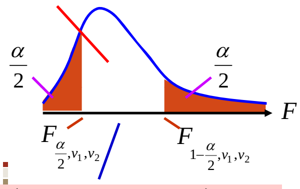
การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

(1 - α)100% CI of variance

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},v}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},v}}$$

การประมาณค่าแบบช่วงความแปรปรวน 2 กลุ่ม

(1 - α)100% Confidence Interval of variance



$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} < F < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}\right) = 1-\alpha$$

แทนค่า

$$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2}$$

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} < \frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} < \frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}\right) = 1-\alpha$$

เทอมซ้ายมือ

$$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} < \frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}.\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}}$$

เทอมขวามือ

$$\frac{s_1^2.\sigma_2^2}{s_2^2.\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}.\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

$$P\left(\boxed{\frac{s_1^2}{s_2^2.F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2.F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}}}\right) = 1-\alpha$$

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

(1 - α)100% CI of ratio between 2 variance

$$\frac{s_1^2}{s_2^2.F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2.F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}}$$