ความน่าจะเป็นและการแจกแจงความน่าจะเป็น

208263 : สถิติเบื้องต้น

โดย... ผศ. ดร. สุคนธ์ ประสิทธิ์วัฒนเสรี
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วัตถุประสงค์

- สามารถอธิบายแนวคิดและการเกิดความน่าจะเป็น และสามารถอธิบายความแตกต่างระหว่าง frequency prob.และ classical prob. ได้
- สามารถอธิบายลักษณะและคุณสมบัติของตัวแปรและตัวแปรสุ่ม และสามารถหาค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มได้
- สามารถอธิบายลักษณะการทดลองและรูปแบบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่ได้จากการทดลองของแบร์นูลลี ทวินาม ปัวซง
- สามารถอธิบายลักษณะการเกิดและรูปแบบของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ
- สามารถหาค่าความน่าจะเป็นของการเกิดค่าของตัวแปรสุ่มใน 4 รูปแบบ
- เข้าใจถึงบทบาท ความสำคัญของความน่าจะเป็นและการแจกแจงความน่าจะเป็น รวมถึงแนวทางการประยุกต์ใช้

Outlines

- แนวคิดและการเกิดความน่าจะเป็น
  - Classical probability
  - Frequency probability
  - กฎเกณฑ์ความน่าจะเป็นที่สำคัญ
- ลักษณะและคุณสมบัติของตัวแปรสุ่ม
  - การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม
  - ค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม
- การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญ
  - การแจกแจงแบร์นูลลี
  - การแจกแจงทวินาม
  - การแจกแจงปัวซง
  - การแจกแจงปกติ

แนวคิดและการเกิดความน่าจะเป็น

- Classical probability
- Frequency probability
- กฎเกณฑ์ความน่าจะเป็นที่สำคัญ

Introduction

- หลายครั้งเป้าหมายในการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติอาจเกินกว่าการสร้างกราฟ หรือใช้สถิติพรรณนา
- เช่น
  - ต้องการคาดการณ์ว่า ยา 2 สูตรสามารถช่วยในการรักษาแตกต่างกัน หรือมีคุณภาพพอ ๆ กัน
  - อัตราการเสียของสินค้าที่ผลิตใน 2 สายการผลิตมีพอ ๆ กัน
- การตอบคำถามเหล่านี้ได้ดี จำนวนเป็นต้องอาศัยองค์ความรู้ของ **“ความน่าจะเป็น”**

The meaning of “Probability”

- **Probability**

  ค่าที่แสดงถึงโอกาส (Chance) หรือ ความเป็นไปได้ (Likelihood) ที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ

  เช่น

  - นักอุตุนิยมฯ กล่าวว่า พรุ่งนี้มีโอกาสที่ฝนจะตก 90 %
  - แพทย์คิดว่า มีโอกาส 50% ที่จะผ่าตัดประสบผลสำเร็จ

ข้อสังเกต:

ความน่าจะเป็นมักเกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ที่มีผลลัพธ์ที่เกิดไม่แน่นอน

องค์ประกอบของความน่าจะเป็น

- การที่จะประเมินได้ว่า

  "พรุ่งนี้มีโอกาสที่ฝนจะตก 90 %"

- จำเป็นต้องพิจารณาให้ได้ก่อนถึง
  - ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้
  - เหตุการณ์ที่สนใจ
  - ตัวแปรสุ่ม

    - ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

    - ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

องค์ประกอบของความน่าจะเป็น

- **การทดลองสุ่ม - Probability experiment**

  การกระทำเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์
- **ผลลัพธ์ - Outcome**

  ผลที่เกิดจากการทดลองแต่ละครั้ง
- **ปริภูมิตัวอย่าง - sample space**

  เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- **เหตุการณ์ - event**

  ผลลัพธ์เฉพาะส่วนที่สนใจเท่านั้น

ตัวอย่าง

- ในการทดลองทอดลูกเต๋า 1 ลูก สนใจผลลูกเต๋าขึ้นหน้าคู่ แสดงองค์ประกอบการทดลองดังกล่าว
  - การทดลองสุ่ม
  - ผลลัพธ์
  - ปริภูมิตัวอย่าง
  - เหตุการณ์ที่สนใจ

ตัวอย่าง

- ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก สนใจผลที่เหรียญขึ้นหัว และลูกเต๋าขึ้นหน้าที่น้อยกว่า 4
  - การทดลองสุ่ม
  - ผลลัพธ์
  - ปริภูมิตัวอย่าง
  - เหตุการณ์ที่สนใจ

Type of probability

- Classical (or theoretical) probability
- Empirical (or frequency) probability

Classical (or theoretical) Probability

- ความน่าจะเป็นแบบฉบับ พิจารณาจากผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ใน Sample space โดยที่ผลลัพธ์แต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน
- ความน่าจะเป็นของ *E*, *P*(*E*) คือ

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Number of outcomes in } E}{\text{Total number of outcomes in } S} = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

Ex: Finding Classical Probabilities

- ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
  - Event A: ได้หน้า 3
  - Event B: ได้หน้า 7
  - Event C: ได้หน้าน้อยกว่า 5

ตัวอย่าง 1

นักศึกษา 3 คน คือ A, B และ C มีดินสอคนละ 1 แท่ง ซึ่งมีลักษณะคล้ายกัน แทนด้วยสัญลักษณ์ a, b, c ตามลำดับ นำดินสอของทั้ง 3 คนวางคละกัน แล้วให้นักศึกษาทั้งสามคนสุ่มหยิบคนละแท่ง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. นักศึกษาทั้ง 3 ได้ดินสอของตัวเอง

ข. นักศึกษา 1 คนได้ดินสอของตัวเอง

ค. ไม่มีนักศึกษาได้ดินสอของตัวเอง

S = {(A-a B-b C-c), (A-a B-c C-b), (A-b B-a C-c),
(A-b B-c C-a), (A-c B-b C-a), (A-c B-a C-b)} ดังนั้น n(S) = 6

ก. P(A = 3 คนได้ดินสอตัวเอง) = n(A)/n(S) = 1/6

ข. P(B = 1 คนได้ดินสอตัวเอง) = n(B)/n(S) = 3/6

ค. P(C = ไม่มีที่ได้ดินสอตัวเอง) = n(C)/n(S) = 2/6

Empirical (or frequency) Probability

- ความน่าจะเป็นเชิงทดลอง คำนวณจากค่าสังเกตที่ได้จากผลการทดลอง
- ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E, $P(E)$, คือ ค่าความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ E

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Frequency of event } E}{\text{Total frequency}} = \frac{f}{N}}$$

Ex: Finding Frequency Probabilities

- ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 50 ครั้ง ได้ผลดังนี้

  1 2 4 5 1 1 2 3 5 6 5 1 1 2 3 4 4 3 3 5 6 1 1 5 6

  1 3 3 5 5 3 6 6 2 2 2 2 4 2 1 1 3 3 5 3 5 3 3 4 5

  จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

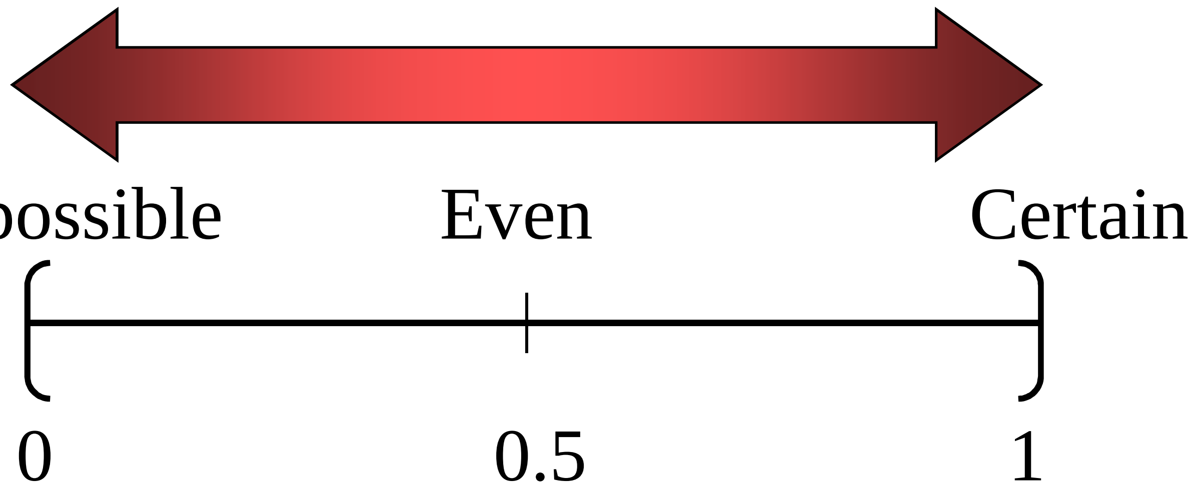
  - Event A: ได้หน้า 3
  - Event B: ได้หน้าน้อยกว่า 5

Law of Large Numbers

- เมื่อทำการทดลองซ้ำ ๆ กันมากขึ้น ค่า Empirical Probability จะมีค่าเข้าใกล้ Classical Probability
- เช่น ทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ สนใจเหรียญขึ้นหัว
  - Classical Prob. P(H) = ½
  - Empirical Prob.
    - ทดลองโยน 10 ครั้ง ปรากฏขึ้นหัว 3 ครั้ง P(E) = 3/10 = 0.3
    - ทดลองโยน 100 ครั้ง ปรากฏว่าขึ้นหัว 52 ครั้ง P(E) = 52/100 = 0.52

การอธิบายค่าความน่าจะเป็น

- ค่าความน่าจะเป็นไม่สามารถมีค่าติดลบ หรือมีค่าเกินกว่า 1 ได้, $0 \leq P(E) \leq 1$
- If $P(E) = 0$, event E is impossible
- If $P(E) = 1$, then event E is certain



Properties of Probability

- ผลรวมของความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ใน Sample space เท่ากับ 1 or 100%

  $$\sum P(E_i) = 1$$

- Complement ของเหตุการณ์ E คือเซตของผลลัพธ์อื่น ๆ ใน Sample space ซึ่งไม่ใช่ E, เขียนแทนด้วย E′

  $$P(E) + P(E') = 1$$

ตัวอย่าง

- ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
  - Event A: ได้หน้าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2
  - Event B: ได้หน้าเกินกว่า 2

ตัวอย่าง

- ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 5 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นหน้าเหมือนกันทุกลูก

S = {11111, 11112, 11113, 11114, 11115, 11116 ...., 66666}

เทคนิคการนับ

- ถ้าในการทดลองประกอบด้วย k ขั้นตอน (ต้องทำทุกขั้นตอน)
  - ขั้นตอน 1 มีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี
  - ขั้นตอน 2 มีวิธีเลือกทำได้ n_2 วิธี
  - ...
  - ขั้นตอน k มีวิธีเลือกทำได้ n_k วิธี
- จำนวนวิธีที่สามารถทำได้ = $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ วิธี

ตัวอย่าง

- รหัส ATM ประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัว อยากทราบจำนวนรหัสที่เป็นไปได้ ถ้า
  - ตัวเลขแต่ละตัวห้ามซ้ำกัน
  - ใช้ตัวเลขซ้ำกันได้

เทคนิคการนับ

- ถ้าในการทดลองประกอบด้วย m รูปแบบ (เลือกทำเพียงรูปแบบเดียว)
  - รูปแบบ 1 มีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี
  - รูปแบบ 2 มีวิธีเลือกทำได้ n_2 วิธี
  - ...
  - รูปแบบ m มีวิธีเลือกทำได้ n_m วิธี
- จำนวนวิธีที่สามารถทำได้ $= n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ วิธี

ตัวอย่าง 2

มีเสื้อสีขาว 1 ตัว มีเสื้อสีดำแตกต่างกัน 2 ตัว มีกางเกงสีขาวแตกต่างกัน 3 ตัว มีกางเกงสีดำแตกต่างกัน 4 ตัว มีรองเท้าสีขาวแตกต่างกัน 5 คู่ มีรองเท้าสีดำแตกต่างกัน 6 คู่ ในการแต่งตัวซึ่งจะต้องสวมเสื้อและกางเกงและใส่รองเท้า

ก. จะมีวิธีแต่งตัวทั้งหมดได้กี่วิธี

ข. จะมีวิธีแต่งตัวโดยทั้งเสื้อ กางเกง และรองเท้าเป็นสีเดียวกัน จะทำได้กี่วิธี

ขั้นตอนการแต่งตัว | เสื้อ | กางเกง | รองเท้า

ก. จำนวนวิธี = 3 . 7 . 11 = 231 วิธี

ข. ชุดสีเดียวกัน : รูปแบบ 1-ขาว รูปแบบ 2-ดำ

จำนวนวิธี = (1 . 3 . 5) + (2 . 4 . 6) = 63

การเรียงสับเปลี่ยน

- เป็นการเรียงสิ่งของตามลำดับ (ลำดับสิ่งของมีความสำคัญ)
  - ถ้าทำการเรียงสิ่งของ n สิ่ง
    จำนวนวิธี = $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$
  - ถ้าเลือกเรียงสิ่งของ r สิ่งจาก n สิ่ง
    จำนวนวิธี = ${}^{n}P_{r} = n! / (n-r)!$
  - ถ้าทำการเรียงสิ่งของ n สิ่ง ที่มีสิ่งของเหมือนกัน $n_1, n_2, \ldots, n_k$
    จำนวนวิธี = $n! / (n_1!.\ n_2!\ \ldots\ n_k!)$

ตัวอย่างที่ 3

- มีคนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 4 คน จัดคนงานให้ทำงาน 3 ชนิด ๆ ละ 1 คน

ก. จะจัดคนงานได้กี่วิธี

ข. ถ้ากำหนดให้คนงานที่จัดให้มาทำงานต้องเป็นเพศเดียวกัน จะจัดได้กี่วิธี

ก. เลือกคนงาน 3 คนจากทั้งหมด 7 คน เพื่อให้ทำงานคนละชนิด

จำนวนวิธี = ${}^{7}P_{3}$ = 210

ข. ลักษณะงาน : รูปแบบ 1 – ชาย รูปแบบ 2 - หญิง

จำนวนวิธี = ${}^{3}P_{3}$ + ${}^{4}P_{3}$

= 6 + 24 = 30

การจัดหมู่

- เป็นการเลือกสิ่งของโดยไม่สนใจลำดับ
  - ทำการเลือกของ r สิ่งจาก n สิ่ง

    จำนวนวิธี = ${}^{n}C_{r} = n! / r!(n - r)!$

ตัวอย่างที่ 5

- มีคนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 4 คน เลือกคนงานมา 3 คนเพื่อทำงานชนิดหนึ่ง

  ก. จะจัดคนงานได้กี่วิธี

  ข. ถ้ากำหนดให้คนงานที่จัดให้มาทำงานต้องเป็นเพศเดียวกัน จะจัดได้กี่วิธี

ก. เลือกคนงาน 3 คนจากทั้งหมด 7 คน เพื่อให้ทำงานคนละชนิด

จำนวนวิธี = ${}^{7}C_{3}$ = 35

ข. ลักษณะงาน : รูปแบบ 1 – ชาย รูปแบบ 2 - หญิง

จำนวนวิธี = ${}^{3}C_{3}$ + ${}^{4}C_{3}$

= 1 + 4 = 5

ตัวอย่างที่ 6

- ในการมีบุตรจำนวน 5 คน ของสามีภรรยาคู่หนึ่ง ถ้าในการคลอดแต่ละครั้งได้บุตรเพศชายและหญิงด้วยโอกาสเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บุตรชาย 3 คน

P(E = ได้บุตรชาย 3 คน) = n(E)/n(S)

S = {(M.M.M.M.M), (M.M.M.M.F), ..., (F.F.F.F.F)}

$n(S) = \underline{2} . \underline{2} . \underline{2} . \underline{2} . \underline{2} = 2^5 = 32$

E = {(M.M.M.F.F), (M.M.F.M.F), ...}

$n(E) = {}^5C_3 = 10$

P(E) = 10/32

กฎเกณฑ์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น

- กรณีที่ต้องการคำนวณความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุการณ์หนึ่ง (A) **หรือ**อีกเหตุการณ์ (B)

$$P(A \text{ or } B) \Rightarrow P(A \cup B)$$

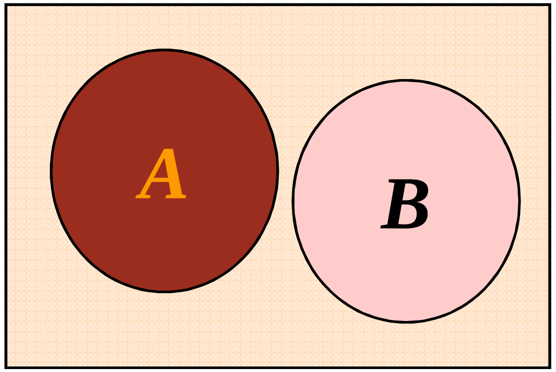
ต้องพิจารณาการเกิดเหตุการณ์เหล่านั้น

- Mutually Exclusive Events – ไม่เกิดร่วมกัน
  - กฎการบวก (Additive rule)
- Not Mutually Exclusive Events – เกิดร่วมกัน

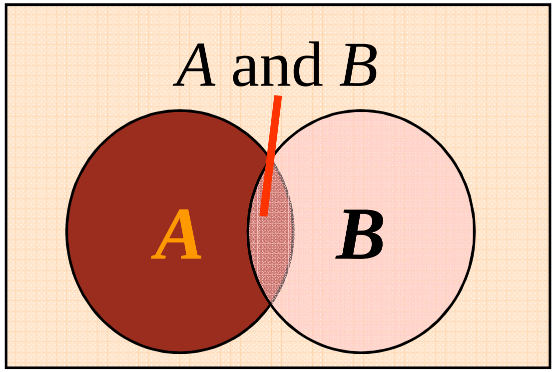
Mutually Exclusive Events

- เหตุการณ์ 2 เหตุกาณ์หรือมากกว่าจะเรียกว่า ไม่เกิดร่วมกัน (**mutually exclusive**) ถ้าเหตุการณ์เหล่านั้นไม่สามารถเกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน

Venn Diagrams



A and *B* are mutually exclusive



A and *B* are not mutually exclusive

Ex : Mutually Exclusive Events

พิจารณาเหตุการณ์ใดเป็น mutually exclusive

- ผลการทอดลูกเต๋า

  A: ขึ้นหน้า 3, *B*: ขึ้นหน้า 4

- ทำการเลือกนักศึกษา 1 คน

  A: ได้นศ.ชาย, *B*: ได้นศ.คณะพยาบาล

- เลือกผู้บริจาคเลือด 1 คน

  A: มีเลือดหมู่ O, *B*: เป็นผู้หญิง

The Addition Rule

- ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A หรือ B จะอาศัยกฎการบวกช่วยในการคำนวณ หาก 2 เหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน

$$\boxed{P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)}$$

- ถ้า 2 เหตุการณ์ คือ A และ B เกิดขึ้นร่วมกันได้

$$\boxed{P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่างที่ 8

- สุ่มไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ (52 ใบ) จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

  ก. ได้ไพ่ดอกจิก หรือ King

  ข. ได้ไพ่ดอกจิก หรือ โพธิ์แดง

<u>วิธีทำ</u>

ก. P(ได้ไพ่ดอกจิก หรือ King) = $P(A \cup B)$

เนื่องจาก A กับ B เกิดขึ้นร่วมกันได้ ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 13/52 + 4/52 - 1/52 = 16/52$$

$P(A) = n(A)/n(S)$

$n(A) = {}^{13}C_1 = 13$

$n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

$P(B) = n(B)/n(S)$

$n(B) = {}^{4}C_1 = 4$

$P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(S)$

$n(A \cap B) = 1$

ข. P(ได้ไพ่ดอกจิก หรือ โพธิ์แดง) = $P(A \cup B)$

เนื่องจาก A กับ B ไม่เกิดขึ้นร่วมกัน ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 13/52 + 13/52 = 26/52$$

กฎเกณฑ์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น (ต่อ)

- ความน่าจะเป็นของการเกิด 2 เหตุการณ์ (หรือมากกว่า) ตามลำดับ

$$P(A \text{ and } B)$$

- ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Probability)
- Independent and Dependent Events
- กฎการคูณ (The Multiplication Rule)

Conditional Probability

- **ความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข** คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่งภายหลังจากได้เกิดอีกเหตุการณ์หนึ่งขึ้นแล้ว

$$\boxed{P(A \mid B) = \text{Probability of A, given } B}$$

Ex : Conditional Prob.

- กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 10 ใบ โดยเป็นลูกบอลสีแดง 4 ใบ สีขาว 6 ใบ สุ่มหยิบลูกบอลทีละ 1 ใบ จำนวน 2 ครั้งโดยไม่ใส่กลับคืน

  จงหาความน่าจะเป็นที่จะลูกบอลสีแดงในครั้งที่ 2 เมื่อครั้งที่ 1 ได้บอลสีขาว

Ex : Conditional Prob.

- ผลของการศึกษาระดับ IQ และการมียีนตัวหนึ่งในเด็กกลุ่มหนึ่ง เป็นดังตาราง

	Gene present	Gene not present	Total
High IQ	33	19	52
Normal IQ	39	11	50
Total	72	30	102

จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กจะมี IQ สูง เมื่อเด็กมียีนดังกล่าว

Independent & Dependent Events

- 2 เหตุการณ์จะเป็น **เหตุการณ์อิสระกัน (Independent events)** ถ้าผลจากการเกิดเหตุการณ์หนึ่งไม่ส่งผลต่อการเกิดขึ้นของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

- Two events A and B are **independent** if

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A) \text{ or if } P(B \mid A) = P(B)}$$

- เหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระกัน คือ **มีความเกี่ยวข้องกัน (dependent)**

Ex : Classifying Events

พิจารณาเหตุการณ์ A และ B ต่อไปนี้ว่าเป็น independent or dependent

- การเลือกได้ไพ่ king (*A*) จากไพ่หนึ่งสำรับ แล้วจากนั้นเลือกได้ไพ่ queen (*B*)

- โยนเหรียญ 1 เหรียญได้หน้าหัว (*A*) จากนั้น ทอดลูกเต๋า 1 ลูกได้แต้ม 6 (*B*)

Independent Events & Multiplication Rule

- ความน่าจะเป็นของการเกิด 2 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันคำนวณได้จากผลคูณระหว่างความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์ หรือที่เรียกว่า**กฎการคูณ (multiplication rule)**

$$\boxed{P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)}$$

Joint Probability

Marginal Probability

Dependent Events & Multiplication Rule

- เมื่อ 2 เหตุการณ์ไม่เป็นอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ทั้ง 2 คือ

$$P(A \text{ and } D) = P(A \mid D) \times P(D)$$

$$\underbrace{P(D \text{ and } A)}_{\text{Joint Prob.}} = \underbrace{P(D \mid A)}_{\text{Conditional Prob.}} \times \underbrace{P(A)}_{\text{Marginal Prob.}}$$

ตัวอย่างที่ 9

- กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟเสีย 4 หลอด และหลอดไฟดี 6 หลอด สุ่มหลอดไฟออกมาตรวจสอบคุณภาพครั้งละ 1 หลอด จำนวน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ครั้งแรกได้หลอดดี ครั้งที่ 2 ได้หลอดเสีย และครั้งที่ 3 ได้หลอดดี โดยมีเงื่อนไขการสุ่มดังนี้

  ก. สุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน

  ข. สุ่มแบบใส่กลับคืน

<u>วิธีทำ</u>

ก. $P(\text{ดี}_1 \text{ และเสีย}_2 \text{ และดี}_3) = P(\text{ดี}_1).P(\text{เสีย}_2|\ \text{ดี}_1).P(\text{ดี}_3|\text{เสีย}_2,\text{ดี}_1)$

$= (6/10)(4/9)(5/8) = 120/720$

ข. $P(\text{ดี}_1 \text{ และเสีย}_2 \text{ และดี}_3) = P(\text{ดี}_1).P(\text{เสีย}_2).P(\text{ดี}_3)$

$= (6/10)(4/10)(6/10) = 144/1000$

กรณีศึกษา: การเสียชีวิตจากอุบัติเหตุ

- จากการศึกษาในโรงพยาบาลแห่งหนึ่งเกี่ยวกับการเสียชีวิตอันเนื่อง มาจากการเกิดอุบัติเหตุ ในผู้เสียชีวิตจำนวน 408 คน

ประเภทอุบัติเหตุ	ช่วงเทศกาล			Total
	ปกติ	ปีใหม่	สงกรานต์	
รถยนต์	66	45	40	151
จักรยานยนต์	45	40	67	152
อื่น ๆ	39	32	34	105
Total	150	117	141	408

จงหาความน่าจะเป็นที่เลือกผู้เสียชีวิตมา 1 คน พบว่า

ก) เสียชีวิตจากรถยนต์ ข) เสียชีวิตเนื่องจากสาเหตุอื่นที่ไม่ใช่รถยนต์

ค) เสียชีวิตจากรถยนต์และเกิดเหตุในช่วงเทศกาลปีใหม่

ง) เสียชีวิตบนท้องถนนเมื่ออยู่ในช่วงเทศกาลสงกรานต์

ลักษณะและคุณสมบัติของตัวแปรสุ่ม

- การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม
- ค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

การแจกแจงความน่าจะเป็น

Probability Distributions

- การแจกแจงความน่าจะเป็นคือหลักพื้นฐานสำคัญในทางสถิติ.
- **การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution)** เป็นการนำเสนอ**ค่าตัวแปรสุ่ม (random variable)** และ**ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่าตัวแปรสุ่มแต่ละค่า**

Random Variables

- ผลลัพธ์ที่สนใจซึ่งได้จากการทดลองสุ่ม ส่วนใหญ่มักเป็นค่าที่ได้จากการนับ หรือการวัด
- เราเรียกค่าดังกล่าวว่า **ตัวแปรสุ่ม (random variable)**
- ตัวแปรสุ่ม X แทนค่าตัวเลขที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งสื่อถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

ผลการรักษาผู้ป่วย 2 คน คือ ก และ ข (S=Success, F=Failure)

S = {ก - S ข - S, ก - S ข - F, ก - F ข - S, ก - F ข - F}

ให้ X แทนจำนวนของผู้ป่วยที่รักษาหาย ➡ $x = 0, 1, 2$

ตัวแปร X จะถูกเรียกว่า **ตัวแปรสุ่ม**

Random Variables

การศึกษาเกี่ยวกับน้ำหนักทารกแรกเกิด (หน่วย: กรัม)

S = {850, 850.01, 850.02, ..., 4500}

ให้ Y แทนน้ำหนักของทารกแรกเกิด

$850 < y < 4500$

ตัวแปร Y จะถูกเรียกว่า **ตัวแปรสุ่ม**

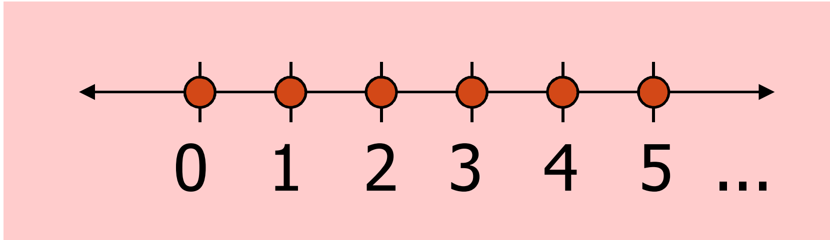
Type of Random Variables

- **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง - Discrete RV.**

  มีลักษณะเป็นเลขจำนวนนับ หรือมีจำนวนจำกัด (finite) ซึ่งสามารถแสดงค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด

  X แทน จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในแต่ละวัน

  $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

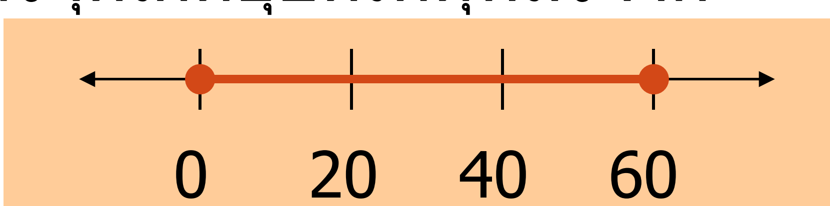


- **Continuous RV.**

  ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มีจำนวนไม่จำกัด (infinite number) มักนำเสนอในรูปช่วงตัวเลข

  Y แทน เวลาที่ใช้ในการมาถึงจุดเกิดอุบัติเหตุหลังจากได้รับแจ้งเหตุ

  $0 < y < 60$



Discrete Probability Distributions

- **การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete probability distribution)** เป็นการเขียนค่าตัวแปรสุ่มแต่ละค่า รวมถึงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแต่ละค่า

- ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับ x เขียนแทนได้ดังนี้

$$P(X = x) = p(x)$$

เรียกว่า **probability mass function, pmf**

Ex : Discrete probability distribution

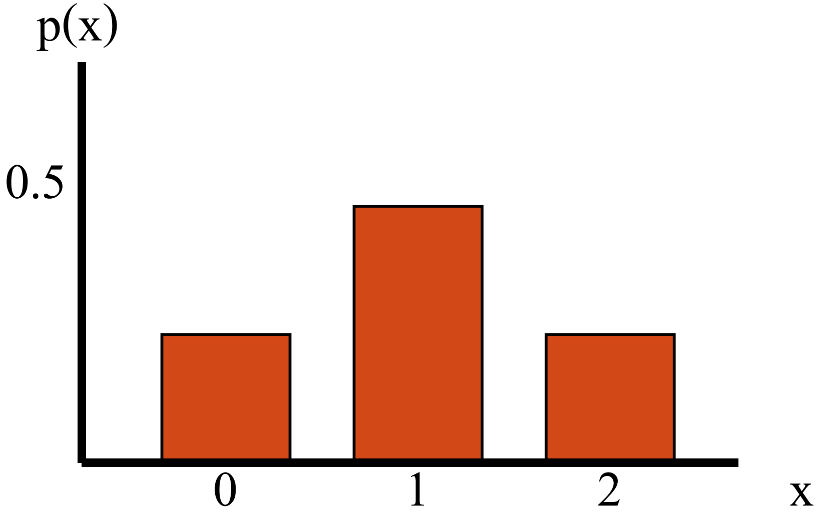
- พิจารณาการทดลองรักษาผู้ป่วย 2 คน คือ ก และ ข จงเขียนการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้ป่วยที่รักษาหาย

ให้ ตัวแปร X แทนจำนวนของผู้ป่วยที่รักษาหาย

$$x = 0, 1, 2$$

การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ

x	$P(X = x)$
0	$P_1 = 1/4$
1	$P_2 = 2/4$
2	$P_3 = 1/4$



- คุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ไม่ต่อเนื่อง
  - ความน่าจะเป็นของค่าตัวแปรสุ่มต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง 1
  - ผลรวมของความน่าจะเป็นทุกค่าของตัวแปรสุ่มเท่ากับ 1

Ex : Discrete probability distribution

นักจิตวิทยาอุตสาหกรรมได้ทำการทดสอบระดับความอดทน-ความก้าวร้าว (passive-aggressive) ในคนงาน 150 คน โดยผลการทดสอบในแต่ละคนจะให้คะแนนในช่วง 1 – 5 (1 = ความอดทนสูง และ 5 = ความก้าวร้าวสูง)

Score, *x*	Frequency
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

จงเขียนการแจกแจงความน่าจะเป็นของคะแนนทดสอบดังกล่าว

Expected Value and Variance of a Discrete Random Variable

- ค่าคาดหวัง (Expected value or Mean)

  $$\mathbf{E(X) = \mu = \Sigma x_i . p(x_i)}$$

  กำหนดให้ h(X) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ X

  $$E[h(X)] = \Sigma h(x_i).p(x_i)$$

  เช่น $h(x) = x^2$ ดังนั้น $E(X^2) = \Sigma x_i^2 \cdot p(x_i)$

- ความแปรปรวน (Variance)

  $$V(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
  $$= E(X^2) - \mu^2$$

Ex : Expected value & variance

จากการแจกแจงความน่าจะเป็นของคะแนนทดสอบความอดทน-ความก้าวร้าวในคนงานเป็นดังตาราง

x	$p(x)$
1	0.16
2	0.22
3	0.28
4	0.20
5	0.14

จงหาค่าคาดหวังและความแปรปรวนของคะแนนดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 10

- เกมส์สุ่มบอลเสี่ยงโชค ให้ผู้เล่นสุ่มบอลจำนวน 2 ลูก จากกล่องซึ่งมีบอลสีแดง 4 ลูก และบอลสีขาว 6 ลูก ถ้าได้บอลสีแดงเหมือนกัน จะได้รับเงิน 10 บาท ถ้าได้บอลสีขาวเหมือนกันจะได้เงิน 5 บาท ถ้าได้บอลสีต่างกันจะเสียเงิน 6 บาท เงื่อนไขของเกมส์นี้ ผู้เล่นเป็นผู้ได้เปรียบหรือเสียเปรียบ

<u>วิธีทำ</u> การพิจารณาความได้เปรียบหรือเสียเปรียบ ควรพิจารณาจาก

- โอกาสที่ผู้เล่นจะได้เงินหรือเสียเงิน (ได้เปรียบ ถ้าโอกาสได้เงิน > เสีย)
- ค่าคาดหวังของจำนวนเงินที่ผู้เล่นได้รับ (ถ้ามีค่าเกิน 0 - ได้เปรียบ)

X : จำนวนเงินที่ผู้เล่นได้รับ

: 10, 5, -6

P(x = 10) = P(บอลแดง 2 ลูก) = ${}^{4}C_2$ / ${}^{10}C_2$ = 6/45

P(x = 5) = P(บอลขาว 2 ลูก) = ${}^{6}C_2$ / ${}^{10}C_2$ = 15/45

P(x = -6) = P(บอลสีต่าง 2 ลูก) = $[{}^{4}C_1 . {}^{6}C_1] / {}^{10}C_2$ = 24/45

$$E(X) = \Sigma x_i . p(x_i) = [10(6/45) + 5(15/45) + (-6)(24/45)]$$

$$= -0.20$$

แสดงว่าผู้เล่นเป็นฝ่ายเสียเปรียบ

Covariance between 2 discrete random variables

- ความแปรปรวนร่วม (Covariance) เป็นค่าแสดงความเกี่ยวข้องระหว่างตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง 2 ตัว (X และ Y)

  เขียนแทนด้วย Cov(X,Y) = $\sigma_{X,Y}$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E\big((X-\bar{X})(Y-\bar{Y})\big) \\
&= E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) \\
&= E(XY)-E(X).E(Y)
\end{aligned}
$$

ถ้า $\sigma_{X,Y} > 0$ มีความเกี่ยวข้องเชิงบวก, $\sigma_{X,Y} < 0$ เชิงบวก

คุณสมบัติของค่าคาดหวังและความแปรปรวน

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม $\Rightarrow$ E(X) และ V(X)

และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม $\Rightarrow$ E(Y) และ V(Y)

กำหนดให้ a, b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

- $E(a) = a$
- $V(a) = 0$
- $E(aX + b) = a.E(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2.V(X)$
- $E(aX + bY) = a.E(X) + b.E(Y)$
- $V(aX + bY) = a^2.V(X) + b^2.V(Y) + 2ab.Cov(X,Y)$

ตัวอย่างที่ 12

- กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม 2 ตัว บันทึกข้อมูลได้ดังนี้

คู่ที่	x	y	คู่ที่	x	y	คู่ที่	x	y	คู่ที่	x	y
1	0	1	11	2	4	21	1	4	31	1	4
2	0	2	12	2	4	22	2	3	32	1	3
3	2	2	13	0	3	23	1	4	33	1	4
4	0	4	14	2	3	24	2	3	34	1	3
5	2	2	15	0	3	25	2	1	35	1	4
6	0	2	16	1	4	26	1	3	36	0	4
7	1	1	17	1	1	27	0	4	37	2	1
8	1	1	18	2	3	28	1	2	38	1	3
9	0	2	19	1	4	29	0	3	39	1	4
10	1	1	20	2	1	30	1	3	40	1	2

ก. จงหาค่าเฉลี่ยของ X

ข. จงหาความแปรปรวนของ Y

ค. จงหาความแปรปรวนร่วม X, Y

ง. กำหนดให้ $U = X^2 - X + 1$ จงหาค่าคาดหวังของ U

	x	y		x	y		x	y		x	y
1	0	1	11	2	4	21	1	4	31	1	4
2	0	2	12	2	4	22	2	3	32	1	3
3	2	2	13	0	3	23	1	4	33	1	4
4	0	4	14	2	3	24	2	3	34	1	3
5	2	2	15	0	3	25	2	1	35	1	4
6	0	2	16	1	4	26	1	3	36	0	4
7	1	1	17	1	1	27	0	4	37	2	1
8	1	1	18	2	3	28	1	2	38	1	3
9	0	2	19	1	4	29	0	3	39	1	4
10	1	1	20	2	1	30	1	3	40	1	2

x \ y	1	2	3	4	รวม
0	1	3	4	3	11
1	4	2	5	8	19
2	3	2	3	2	10
รวม	8	7	12	13	40

x \ y	1	2	3	4	รวม	p(x)
0	1	3	4	3	11	11/40
1	4	2	5	8	19	19/40
2	3	2	3	2	10	10/40
รวม	8	7	12	13	40	
p(y)	8/40	7/40	12/40	13/40		

ก. $E(X) = \Sigma x_i . p(x_i)$

$= [0(11/40)+1(19/40)+2(10/40)] = .98$

ข. $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$= 8.8 - (2.75)^2$

$= 1.24$

$E(Y^2) = \Sigma y^2 . p(y)$

$= 1^2(8/40)+...+4^2(13/40) = 8.8$

$E(Y) = 1(8/40)+...+4(13/40) = 2.75$

x \ y	1	2	3	4	รวม
0	1 1/40	3 3/40	4 4/40	3 3/40	11
1	4 4/40	2 2/40	5 5/40	8 8/40	19
2	3 3/40	2 2/40	3 3/40	2 2/40	10
รวม	8	7	12	13	40

ค. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 2.58 - (0.98 \times 2.75) = -0.12$

$E(XY) = \Sigma x.yp(xy)$

$= [(0)(1)(1/40)+(0)(2)(3/40)+\ldots+(2)(4)(2/40)]$

$= 2.58$

ง. $U = X^2 - X + 1$

$E(U) = E[X^2 - X + 1] = E(X^2) - E(X) + 1$

$= 59/40 - 0.98 + 1$

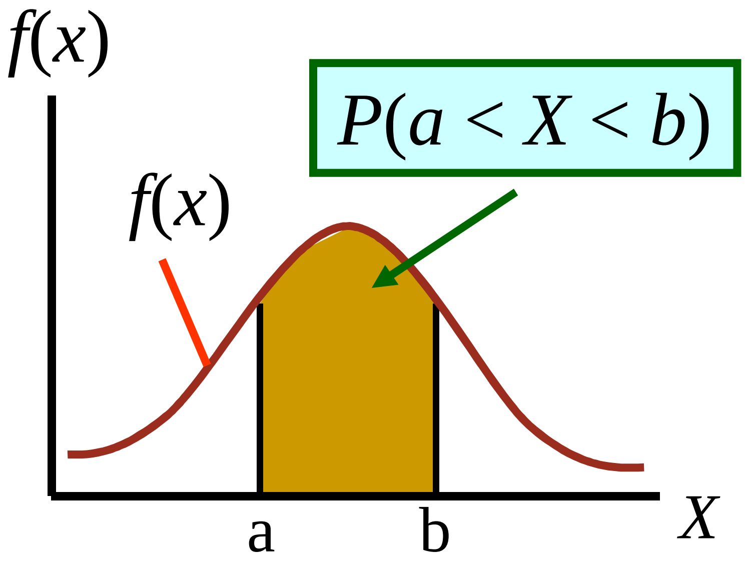
$= 1.495$

Continuous Probability Distributions

- X คือตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง สามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function (pdf)) ของ X คือ $f(x)$
- ความน่าจะเป็นของ x ซึ่งมีค่าระหว่าง a ถึง b คือ

$$p[a \le x \le b] = \int_a^b f(x)dx$$

Probability Distribution: Continuous RV.



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

- P(x = a) = 0
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Continuous RV.

Expected Value and Variance of a Continuous Random Variable

- Expected value

$$E(X) = \mu = \int x_i . f(x_i).\mathrm{d}x$$

- Variance

$$V(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

ตัวอย่างที่ 11

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x) = x,\ 0 < x < \sqrt{2}$$

จงหาค่าคาดหวังของ X^2

$$E(x^2) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2.xdx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} = 1$$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญ

- การแจกแจงแบร์นูลลี
- การแจกแจงทวินาม
- การแจกแจงปัวซง
- การแจกแจงปกติ

Common Probability Distribution

Discrete probability distribution

- Bernoulli Distribution
- Binomial Distribution
- Poisson Distribution
- Uniform Distribution
- Multinomial Distribution
- ...

Continuous probability distribution

- Normal distribution
- t distribution
- χ^2 distribution
- F distribution
- Exponential distribution
- ...

Bernoulli Distribution

- **การทดลองแบร์นูลลี**
  - ทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ
    ให้ y = 1 เมื่อเหรียญขึ้นหัว และ y = 0 เมื่อขึ้นก้อย
  - การเลือกคำตอบ 4 ตัวเลือกจากข้อคำถามหนึ่ง
    ให้ y = 1 ถ้าตอบถูก และ y = 0 ถ้าตอบผิด

  Sample space = {Success, Failure}

  ให้ P(S) = p, P(F) = q = 1-p

- **ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี** Y = การเกิดSuccess ={0, 1}

  $P(y) = p^y . q^{1-y}$ prob. mass func.

  โดย E(Y) = p และ V(Y) = pq

Ex : Bernoulli Trial

- พิจารณาการศึกษาต่อไปนี้
  - ในการผ่าตัดรักษาผู้ป่วยโรคชนิดหนึ่ง มีโอกาสสำเร็จ 85% ถ้าแพทย์ทำการผ่าตัดดังกล่าวกับผู้ป่วย 1 ราย สนใจผลการผ่าตัดที่ประสบผลสำเร็จ

    เป็นการทดลองแบร์นูลลี

    โดย X : จำนวนการผ่าตัดที่ประสบผลสำเร็จ

    = {0, 1} X~ber(x; p=0.85)
  - ในการทดลองปลูกเมล็ดพืชชนิดหนึ่งในกระถางจำนวน 1 เมล็ด สนใจผลการงอกของเมล็ด หากกำหนดให้โอกาสที่แต่ละเมล็ดจะงอกเท่ากับ 0.75

    เป็นการทดลองแบร์นูลลี

    โดย X : จำนวนเมล็ดที่งอก X~ber(x; p=0.75)

Binomial Distribution

การทดลองทวินาม

- เป็นการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยที่การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน
- ในแต่ละครั้งของการทดลองเกิดผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 อย่าง คือ ผลลัพธ์ที่สนใจ (success, *S*) และผลลัพธ์ที่ไม่สนใจ (failure, *F*)
- ในแต่ละครั้งของการทดลอง มีค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สนใจคือ P(S) = ***p*** (P(F) = ***q*** = 1-*p*)
- สนใจตัวแปรสุ่ม ***X*** จำนวนครั้งที่เกิดผลลัพธ์ที่สนใจ โดยค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, ..., n

จะได้ว่า $X \sim b(x; n, p)$

อ่านว่า X มีการแจกแจงแบบทวินาม ภายใต้การทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยมี P(S) = p

Ex : Binomial Trial

- พิจารณาการศึกษาต่อไปนี้ว่าเป็นการทดลองทวินามหรือไม่
  - ในการผ่าตัดรักษาผู้ป่วยโรคชนิดหนึ่ง มีโอกาสสำเร็จ 85% ถ้าแพทย์ทำการผ่าตัดดังกล่าวกับผู้ป่วย 8 ราย สนใจจำนวนครั้งที่ประสบผลสำเร็จในการผ่าตัด

    เป็นการทดลองทวินาม โดย X~b(x;n = 8, p=0.85)

  - ในการทดลองปลูกเมล็ดพืชชนิดหนึ่งในกระถางจำนวน 5 เมล็ด สนใจจำนวนเมล็ดที่งอก หากกำหนดให้โอกาสที่แต่ละเมล็ดจะงอกเท่ากับ 0.75

    หากทำการทดลองปลูกในกระถางทั้งสิ้น 10 กระถาง สนใจจำนวนกระถางที่มีเมล็ดงอกอย่างน้อย 1 เมล็ด

    กรณี 1: X จำนวนเมล็ดที่งอก X~b(x; n=5, p=0.75)

    กรณี 2: Y จำนวนกระถางที่เมล็ดงอกอย่างน้อย 1 เมล็ด

    $Y \sim b(y;\ n = 10,\ p = P(X \geq 1))$

Binomial Probabilities

- จากการทดลองทวินาม ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สนใจ x ครั้ง จากการทดลอง n ครั้ง คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}}$$

Probability mass function

โดยที่ $0 < P(x_i) < 1$ และ $\sum P(x_i) = 1$

ค่าเฉลี่ย $E(X) = np$

ความแปรปรวน $V(X) = npq$

Ex : Finding binomial distribution

- ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จำนวน 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นหน้า 6 เพียง 1 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 15

- สามี-ภรรยาวางแผนจะมีบุตร 4 คน ถ้าในการมีบุตรแต่ละครั้งจะได้บุตรชายหรือหญิงด้วยความเป็นไปได้เท่าเทียมกัน จงหาความน่าจะเป็น

  ก. บุตรคนแรกเป็นชาย

  ข. บุตรชาย 1 คน

ก. E = บุตรคนแรกเป็นชาย

M			

P(E) = 1/2

ข. Binomial trial

X = จำนวนบุตรชาย

= 0, 1, 2, 3, 4

X ~ b(x,n = 4, p = 1/2)

$P(x=1) = {}^4C_1(1/2)^1(1/2)^3$

$= 0.25$

Table : Individual Binomial Dist.

n	x	p .01	.05	.10	...	.50
1	0	.9900	.9500	.9000	...	.5000
	1	.0100	.0500	.1000	...	.5000
...						
4	0	.9606	...			.0625
	1	.0388	...			.2500
	2	.0006	...			.3750
...						

$P(x = 1|n = 4, p = .50) = .2500$

ตัวอย่างที่ 16

- โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนสวมแว่นสายตาสั้น 15% ถ้าสุ่มนักเรียนจำนวน 10 คน จงหาความน่าจะเป็น

  ก. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้น 3 คน

  ข. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้นอย่างมาก 3 คน

  ค. ได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้นมากกว่า 3 คน

		p	
n	x	...	**.15**
10	0		.1969
	1		.3474
	2		.2759
	3		.1298
	...		...

ให้ X = จำนวนนักเรียนที่สวมแว่นสายตาสั้น

= 0, 1, 2, ..., 10

$X \sim b(x;n = 10, p = 15\% = 0.15)$

ก. $P(x=3) = {}^{10}C_3(0.15)^3(0.85)^7$

$= 0.1298$

ข. $P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

$= 0.1969 + 0.3474 + 0.2759 + 0.1298 = 0.95$

ตัวอย่างที่ 16

ให้ X = จำนวนนักเรียนที่สวมแว่นสายตาสั้น

= 0, 1, 2, ..., 10

$X \sim b(x; n = 10, p = 15\% = 0.15)$

ค. ความน่าจะเป็นได้นักเรียนสวมแว่นสายตาสั้นมากกว่า 3 คน

$$P(x > 3) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + \ldots + P(x=10)$$

$$= 1 - 0.95 = 0.05$$

จาก $\sum p(x_i) = 1$

ดังนั้น

$$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+\ldots+P(x=10) = 1$$

จะได้ว่า $P(x=4) + \ldots + P(x=10) = 1 - P(x \leq 3)$

ตัวอย่างที่ 16

ให้ X = จำนวนนักเรียนที่สวมแว่นสายตาสั้น

= 0, 1, 2, ..., 10

$X \sim b(x;n = 10, p = 15\% = 0.15)$

จงหาค่าคาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนนร.ที่สวมแว่นสายตาสั้น

$E(X) = \sum x.P(x)$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

		p	
n	x	...	**.15**
10	0		.1969
	1		.3474
	2		.2759
	3		.1298
	4		.0401
	5		.0085
	6		.0012
	7		.0001
	...		...

ตัวอย่างที่ 17

- ถ้าในการเผาเครื่องเคลือบด้วยน้ำยาซึ่งผู้ผลิตรับรองว่า 90% ของเครื่องเคลือบจะสวยงามดี ทำการเผาเครื่องเคลือบด้วยน้ำยาชนิดนี้ 20 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็น

  ก. สีด้านไม่สวยงาม 6 ชิ้น

  ข. สีสวยงามดี 15 ชิ้น

  ค. สีสวยงามดีอย่างมาก 15 ชิ้น

ก. ให้ X = จำนวนชิ้นที่สีไม่สวย

$= 0, 1, 2, \ldots, 20$

$X \sim b(x;n = 20, p = 10\% = 0.1)$

$P(x=6) = 0.0089$

ข. ให้ Y = จำนวนชิ้นที่สีสวย

$= 0, 1, 2, \ldots, 20$

$Y \sim b(y;n = 20, p = 0.9)$

$P(y = 15) = P(x = 5)$

$= 0.0319$

ค.

$P(y \leq 15) = P(x \geq 5)$

$= 1 - P(x<5)$

$= 0.0431$

ลองพิจารณา สัญลักษณ์ของข้อความ

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**ไม่เกิน** 5

  ก. $P(X < 5)$ ข. $P(X \leq 5)$ ค. $P(X \geq 5)$

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**ไม่น้อยกว่า** 5

  ก. $P(X < 5)$ ข. $P(X > 5)$ ค. $P(X \geq 5)$

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**อย่างมาก** 4

  ก. $P(X < 4)$ ข. $P(X \leq 4)$ ค. $P(X \geq 4)$

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**อย่างน้อย** 4

  ก. $P(X < 4)$ ข. $P(X \leq 4)$ ค. $P(X \geq 4)$

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**เกินกว่า** 6

  ก. $P(X > 6)$ ข. $P(X \leq 6)$ ค. $P(X \geq 6)$

- ค่าความน่าจะเป็น X มีค่า**ต่ำกว่า** 6

  ก. $P(X < 6)$ ข. $P(X \leq 6)$ ค. $P(X \geq 6)$

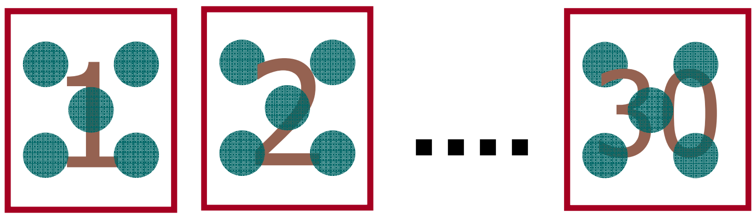
ตัวอย่างที่ 19

- เมล็ดพันธุ์พืชชนิดหนึ่งมีอัตราการงอก 80% ทดลองปลูกพืชดังกล่าว 30 แปลง ๆ ละ 5 เมล็ด

ก. คาดว่ามีเมล็ดงอกเท่าไร

ข. คาดว่ามีแปลงที่เมล็ดงอกทั้งหมดกี่แปลง

ค. ความน่าจะเป็นที่จะมีแปลงที่เมล็ดเสีย 1 เมล็ดไม่เกิน 10 แปลง



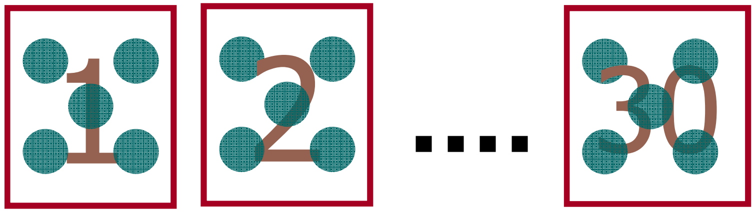
ก. ให้ X = จำนวนเมล็ดที่งอก

= 0, 1, 2, ..., 150

$X \sim b(x; n = 150, p = 80\% = 0.8)$

$E(X) = n.p = 150 \times 0.8 = 120$

ตัวอย่างที่ 19



ข. คาดว่ามีแปลงที่เมล็ดงอกทั้งหมดกี่แปลง

ให้ Y = จำนวนแปลงที่เมล็ดงอกทั้งหมด

$= 0, 1, 2, ..., 30$

$Y \sim b(y;n = 30,$ **p** $= ?)$

p = P(เมล็ดงอกทั้งหมดใน 1 แปลง) = 0.3277

$E(Y) = n.$**p** $= 30x0.3277 = 9.831$

ให้ U = จำนวนเมล็ดที่งอกใน 1 แปลง

$= 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$U \sim b(u; n=5, p=0.8)$

p $= P(u = 5) = P(v = 0) = 0.3277$

ให้ V = จำนวนเมล็ดที่ไม่งอกใน 1 แปลง

$= 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$V \sim b(v; n=5, p=0.2)$

ตัวอย่างที่ 19

ค. ความน่าจะเป็นที่จะมีแปลงที่เมล็ดเสีย 1 เมล็ดไม่เกิน 10 แปลง

ให้ Z = จำนวนแปลงที่เมล็ดเสีย 1 เมล็ด

$= 0, 1, 2, ..., 30$

$Z \sim b(z;n = 30, \mathbf{p} = ?)$

p = P(เมล็ดเสีย 1 เมล็ดใน 1 แปลง) = 0.4096

$P(z \leq 10) = P(z=0) + P(z=1) + ... + P(z=10) = 0.2914$

ให้ V = จำนวนเมล็ดเสียใน 1 แปลง

$= 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$V \sim b(v; n=5, p=0.2)$

p = P(v = 1) = 0.4096

Poisson Distribution

การทดลองปัวซง

- เป็นการทดลองเพื่อพิจารณาจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์หรือผลลัพธ์ที่สนใจ, X, ในช่วงที่กำหนด (ช่วงในที่นี้อาจเป็นช่วงเวลา, ช่วงของพื้นที่)
- โอกาสการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจมีค่าเท่า ๆ กันตลอดช่วงกำหนดให้ในช่วงที่กำหนด มีจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์โดยเฉลี่ย = λ
- จำนวนที่เกิดเหตุการณ์ในช่วงหนึ่งเป็นอิสระกับจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงอื่น ๆ

หากให้

X แทนจำนวนครั้งที่เกิดผลลัพธ์ที่สนใจในช่วงที่กำหนด

= 0, 1, 2, ...,

จะได้ว่า $X \sim p(x; \lambda)$ อ่านว่า X มีการแจกแจงแบบปัวซง

Ex : Poisson trial

- ในการศึกษาถึงจำนวนผู้ป่วยที่เข้ารับการรักษาในแต่ละวันของโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง พบว่าโดยเฉลี่ยมีผู้ป่วยเข้ารับการรักษาวันละ 50 คน
  - สนใจ : จำนวนผู้ป่วยที่เข้ารับการรักษาในแต่ละวัน
  - ช่วงที่ศึกษา : ใน 1 วัน
  - โดยเฉลี่ยมีผู้ป่วยต่อวัน 50 คน -> $\lambda = 50$
  - ให้ตัวแปรสุ่ม X : จำนวนผู้ป่วยในแต่ละวัน

    : 0, 1, 2, 3, ...

  ดังนั้น $X \sim p(x; \lambda = 50)$

Ex : พิจารณาลักษณะตัวแปรสุ่ม

- จำนวนการเกิดอุบัติเหตุโดยเฉลี่ยต่อเดือน ณ สี่แยกแห่งหนึ่งเท่ากับ 3 ครั้ง อยากทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุ ณ สี่แยกนั้นในเดือนหน้าเท่ากับ 4 ครั้ง

  ตัวแปรสุ่ม X : จำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุในเดือนหน้า

  $X \sim \mathrm{p}(x;\lambda = 3)$

- 40% ของคนเชียงใหม่ออกกำลังกาย 30 นาที/สัปดาห์ ทำการสอบถามคนเชียงใหม่ 120 คน อยากทราบความน่าจะเป็นที่จะพบ 50 คน ออกกำลังกาย 30 นาที/สัปดาห์

  ตัวแปรสุ่ม X : จำนวนคนที่ออกกำลังกาย 30 นาที/สัปดาห์

  $X \sim \mathrm{b}(x;\ n=120,\ p=0.40)$

Poisson Probabilities

- จากการทดลองปัวซง ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สนใจ x ครั้ง ในช่วงที่ศึกษา คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad e = 2.71828$$

- โดยที่ $0 < P(x_i) < 1$ และ $\sum P(x_i) = 1$
- $E(X) = V(X) = \lambda$ (ค่าเฉลี่ยมีค่าเท่ากับความแปรปรวน)
- ถ้า $X_1 \sim p(x_1; \lambda_1)$ และ $X_2 \sim p(x_2; \lambda_2)$

  หาก $X_3 = X_1 + X_2$ จะได้ว่า $X_3 \sim p(x_3; \lambda_1 + \lambda_2)$

Table : Individual Poisson Dist.

		λ			
x	0.1	0.2	0.3	...	1.0
0	.9048	.8187	.7408	...	.3679
1	.0905	.1637	.2222	...	.3679
2	.0045	.0164	.0333	...	.1836
3	.0002	.0011	.0033	...	.0613
4	.0000	.0001	.0002	...	.0153
...					

$P(x = 4 | \lambda = 1) = .0153$

Ex. ให้ X ~ p(x; λ = 1) จงหา P(x = 4)

$$P(x=4) = \frac{e^{-1}1^4}{4!}$$

ตัวอย่างที่ 20

- ถ้าผ้าพลาสติกที่ผลิตโดยเครื่องจักรจะมีรอยตำหนิโดยเฉลี่ยม้วนละ 3 แห่ง ถ้าซื้อผ้าดังกล่าว 1 ม้วน จงหา

  ก. ความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิ 2 แห่ง

  ข. ความน่าจะเป็นที่จะมีตำหนิไม่เกิน 2 แห่ง

x	λ ... 3
0	.0498
1	.1494
2	.2240
...	...

สนใจ : รอยตำหนิบนผ้า 1 ม้วน

ให้ X = จำนวนรอยตำหนิบนผ้า 1 ม้วน

= 0, 1, 2, 3, ...

$X \sim p(x; \lambda = 3)$

ก. $P(x = 2) = (e^{-3}.3^2)/2!$

$= 0.224$

ข. $P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$= 0.0498 + 0.1494 + 0.2240$

$= 0.4232$

ตัวอย่างที่ 21

- พนักงานรับโทรศัพท์ ณ สำนักงานแห่งหนึ่งจะรับโทรศัพท์โดยเฉลี่ยวันละ 14 ครั้ง

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งในวันพรุ่งนี้

ข. ถ้าในเดือนหน้า บริษัทดังกล่าวทำงาน 20 วัน คาดว่าจะมีกี่วันที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง

ค. ถ้าในเดือนหน้า บริษัททำงาน 20 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์น้อยกว่า 10 ครั้งต่อวันจำนวน 5 วัน

ตัวอย่างที่ 21

- พนักงานรับโทรศัพท์โดยเฉลี่ยวันละ 14 ครั้ง

  λ = 14 ครั้ง/วัน

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งในวันพรุ่งนี้

สนใจ : จำนวนครั้งที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งในวันพรุ่งนี้

ตัวแปรสุ่ม X : จำนวนครั้งที่พนักงานรับโทรศัพท์ในวันพรุ่งนี้

: 0, 1, 2, 3, ...

$X \sim p(x; \lambda = 14)$

$$P(x \geq 10) = P(x=10) + P(x=11) + \ldots$$

$$= 1 - P(x < 10) = 1 - [P(x=0) + \ldots + P(x=9)]$$

$$= 0.8907$$

ตัวอย่างที่ 21

- พนักงานรับโทรศัพท์โดยเฉลี่ยวันละ 14 ครั้ง

  λ = 14 ครั้ง/วัน

ข. ถ้าในเดือนหน้า บริษัทดังกล่าวทำงาน 20 วัน คาดว่าจะมีกี่วันที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง

สนใจ : จำนวนวันที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งในเดือนหน้า

Y : จำนวนวันที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งในเดือนหน้า

: 0, 1, 2, 3, ..., 20

$Y \sim b(y; n = 20, \mathbf{p} = ?)$

$E(Y) = n.\mathbf{p} = 20 \times 0.8907 = 17.814$ วัน

p = Prob. ที่พนักงานรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้งใน 1 วัน

$= P(x \geq 10) = 0.8907$

ตัวอย่างที่ 21

- พนักงานรับโทรศัพท์โดยเฉลี่ยวันละ 14 ครั้ง

  λ = 14 ครั้ง/วัน

ค. ถ้าในเดือนหน้า บริษัททำงาน 20 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานรับโทรศัพท์น้อยกว่า 10 ครั้งต่อวัน จำนวน 5 วัน

สนใจ : จำนวนวันที่พนักงานรับโทรศัพท์น้อยกว่า 10 ครั้งต่อวัน จำนวน 5 วัน

Z : จำนวนวันที่พนักงานรับโทรศัพท์น้อยกว่า 10 ครั้งในเดือนหน้า

: 0, 1, 2, 3, ..., 20

$Z \sim b(z; n = 20, \mathbf{p} = ?)$

$P(Z = 5) = 0.0319$

p = Prob. ที่พนักงานรับโทรศัพท์น้อยกว่า 10 ครั้งใน 1 วัน

$= P(x < 10) = 1 - 0.8907 = 0.1093 \sim 0.1$

ตัวอย่างที่ 21

- ถ้าโดยเฉลี่ยอนุภาคชนิดหนึ่งจะวิ่งผ่านเครื่องวัดวินาทีละ 5 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีอนุภาควิ่งผ่านเครื่องวัดจำนวน 9 ตัวในเวลา 3 วินาที

ให้ X = จำนวนอนุภาคที่วิ่งผ่านเครื่องวัดในเวลา 3 วินาที

= 0, 1, 2, ...,

$X \sim p(x; \lambda = ?)$

ในเวลา 1 วินาที จำนวนอนุภาควิ่งผ่านโดยเฉลี่ย = 5 ตัว

ในอีก 1 วินาทีถัดมา จำนวนอนุภาควิ่งผ่านโดยเฉลี่ย = 5 ตัว ...

ดังนั้น ใน 3 วินาที จะมีจำนวนอนุภาควิ่งผ่านโดยเฉลี่ย = 5+5+5 = 15 ตัว -> λ

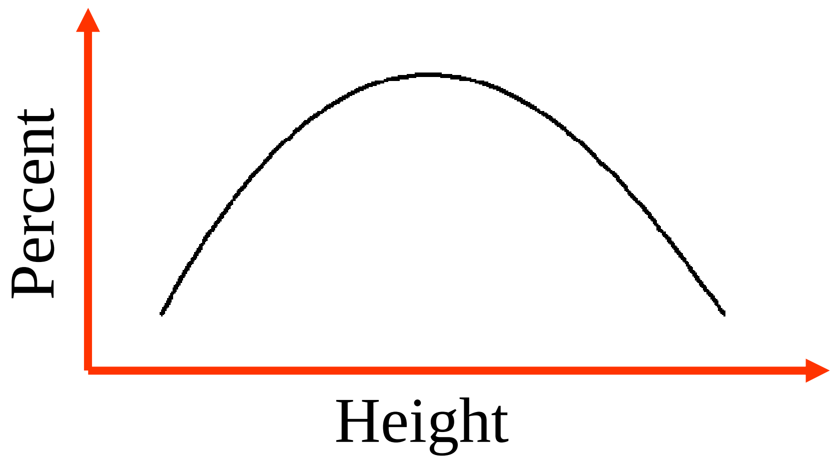
$P(x = 9) = 0.0324$

การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซง

- ถ้า $X \sim b(x; n, p)$
  เมื่อ $n \to \infty$ (n มีขนาดใหญ่) และ $p \to 0$
  สามารถประมาณ $X \sim p(x; \lambda = np)$

- เช่น กำหนด $X \sim b(x; n = 50, p = 0.1)$ จงหา $P(x = 5)$
  เนื่องจาก n มีขนาดใหญ่ จึงไม่สามารถใช้ตารางทวินามได้
  ประมาณ $X \sim p(x; \lambda = 50 \times .1 = 5)$
  ดังนั้น $P(x=5) = .1755$ (จากตารางปัวซง)

Normal Distribution



- เป็นรูปแบบของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ถูกนำมาใช้ในสถิติมากที่สุด โดยเฉพาะกับตัวแปรต่อเนื่อง
- ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติมักมีค่าของข้อมูลอยู่รอบ ๆ ค่าเฉลี่ย

การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

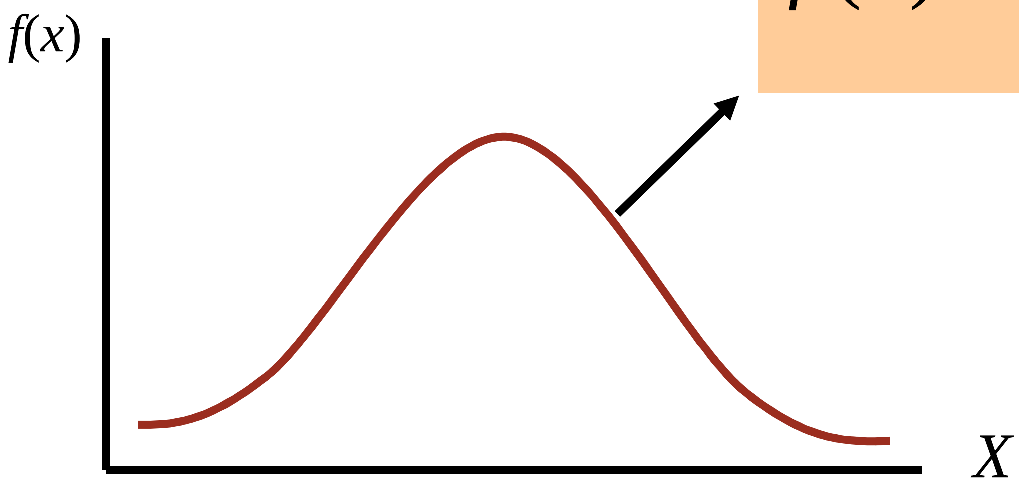
ให้ X แทนตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

เขียนแทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

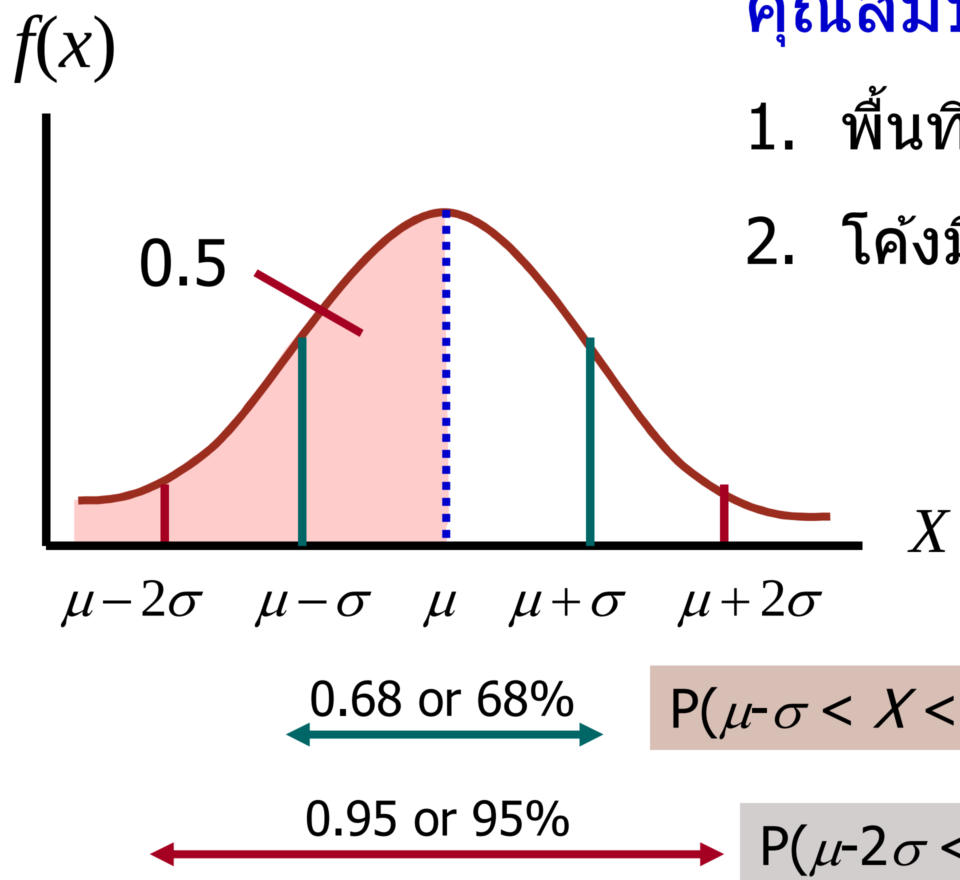
โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

ความหนาแน่นของความน่าจะเป็น



การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)



คุณสมบัติของ Normal Curve

1. พื้นที่ภายใต้โค้งทั้งหมดเท่ากับ 1
2. โค้งมีจุดสมมาตรอยู่ที่ μ

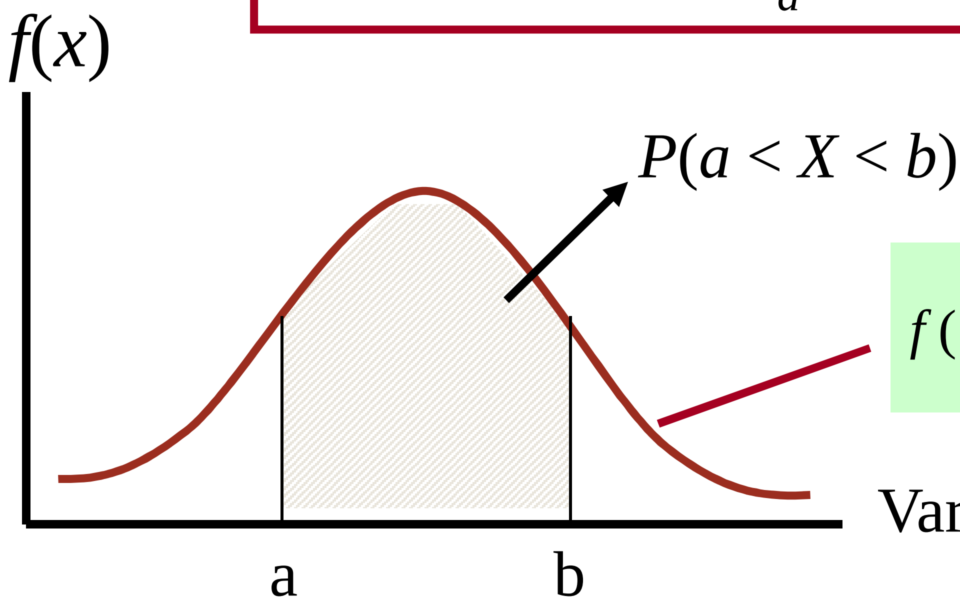
$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0.68$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.95$

ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มภายใต้การแจกแจงปกติ

- เมื่อตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ การหาความน่าจะเป็นของ X สามารถทำได้โดยการหาพื้นที่ใต้โค้งจาก Normal Curve ดังนี้

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มภายใต้การแจกแจงปกติ

- เพื่อง่ายต่อการคำนวณ สามารถทำการปรับให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่ม Z โดย

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Downarrow$$

$$Z \sim N(0,\ 1)$$

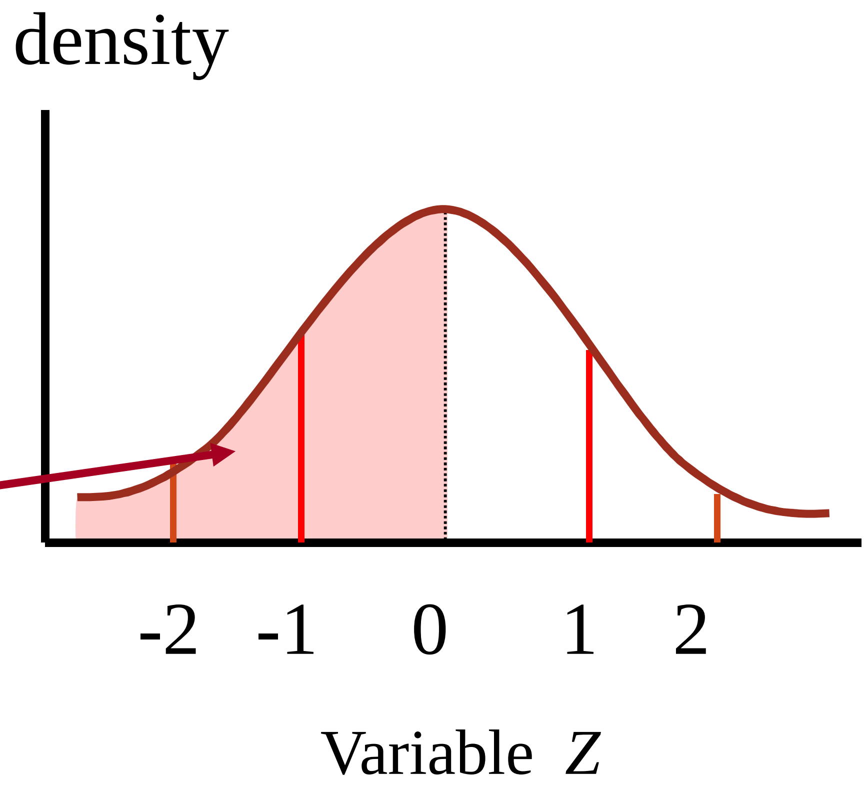
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ตัวแปร Z มี**การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน** (Standard Normal Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1

Standard Normal Distribution

คุณสมบัติของ Standard Normal Curve

1. พื้นที่ภายใต้โค้งทั้งหมดเท่ากับ 1
2. โค้งมีจุดสมมาตรอยู่ที่ 0
3. พื้นที่สะสมที่ z = 0 คือ 0.500



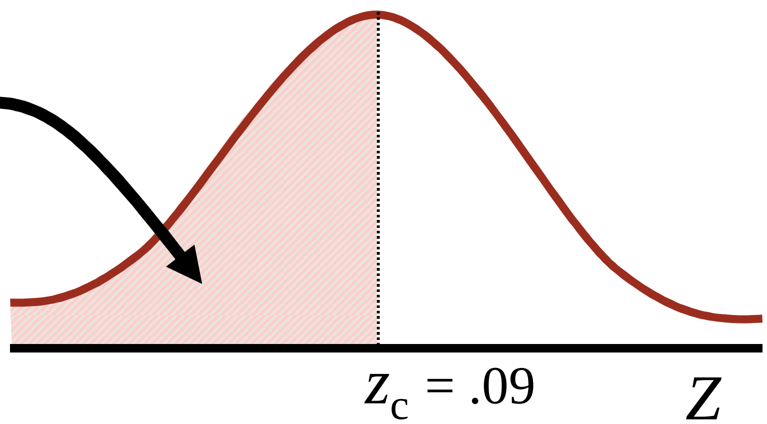
สามารถทำการหาค่าความน่าจะเป็น หรือพื้นที่ใต้โค้งของ Z ได้จาก**ตารางมาตรฐาน**

เช่น $P(Z < 0) = ?$

การใช้ตารางมาตรฐาน Z

Table : Cumulative Standard Normal Distribution

x	.00	.01	...	.09
.0	.5000	.5040	...	.5359
.1	.5298	.5438	...	.5753
...				
3.4	.9997	.9997	...	.9998



$$P(Z < z_c) = .5359$$

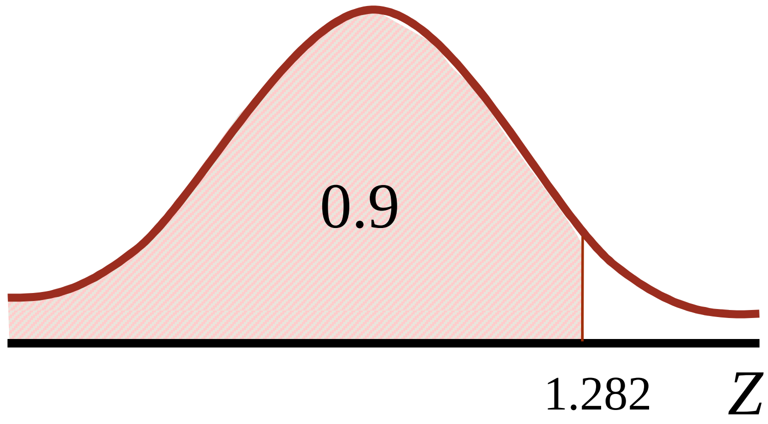
$$Z_{.5359} = 0.09$$

x	1.282	1.645	...
F(***x***)	.90	.95	...
2[1-F(***x***)]	.20	.10	...

การใช้ตารางมาตรฐาน *Z*

Table : Cumulative Standard Normal Distribution

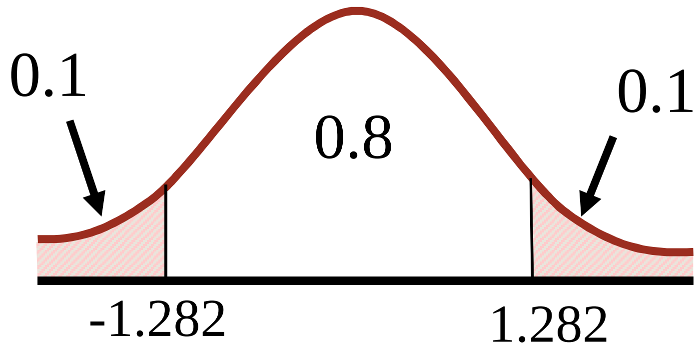
x	.00	.01	...	.09
.0	.5000	.5040	...	.5359
.1	.5298	.5438	...	.5753
...				
3.4	.9997	.9997	...	.9998



$$P(Z < z_c) = 0.9$$

$$Z_{0.9} = 1.282$$

x	1.282	1.645	...
F(***x***)	.90	.95	...
2[1-F(***x***)]	.20	.10	...

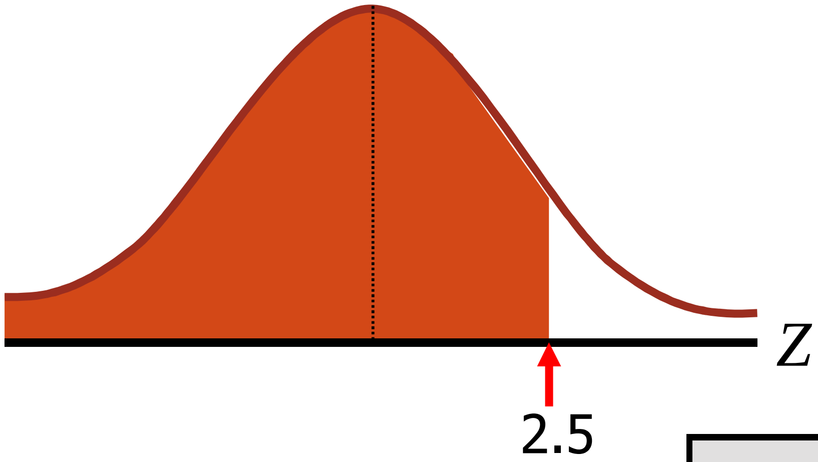


ตัวอย่างที่ 24 Z ~ N(0, 1) จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. $P(Z < 2.5)$ ข. $P(Z \geq 1.25)$

ค. $P(0.2 < Z < 2.07)$ ง. $P(Z < -2.34)$

จ. $P(Z \geq -0.67)$ ฉ. $P(-1.23 < Z \leq 2.35)$



ก. $P(Z < 2.5) = 0.9938$

x	.00	.01	...	.09
.0	.5000	.5040	...	.5359
...				
2.5	.9938	.9940	...	.9952
2.6	.9953	.9955	...	

ตัวอย่างที่ 24 $Z \sim N(0, 1)$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. $P(Z < 2.5)$ ข. $P(Z \geq 1.25)$

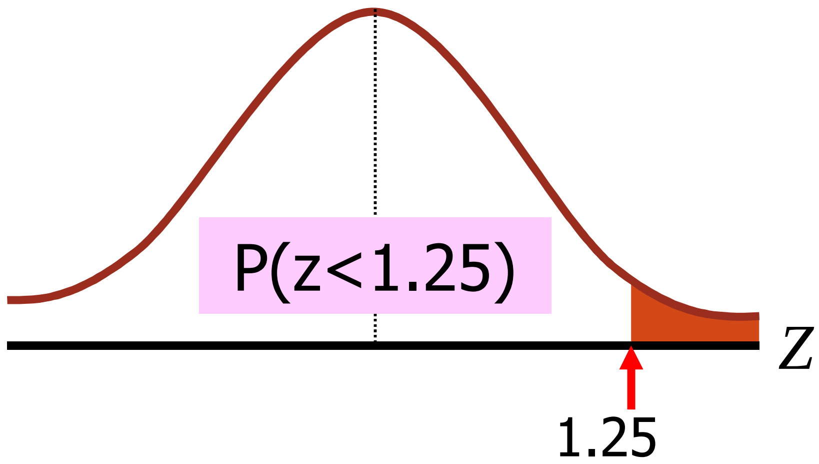
ค. $P(0.2 < Z < 2.07)$ ง. $P(Z < -2.34)$

จ. $P(Z \geq -0.67)$ ฉ. $P(-1.23 < Z \leq 2.35)$

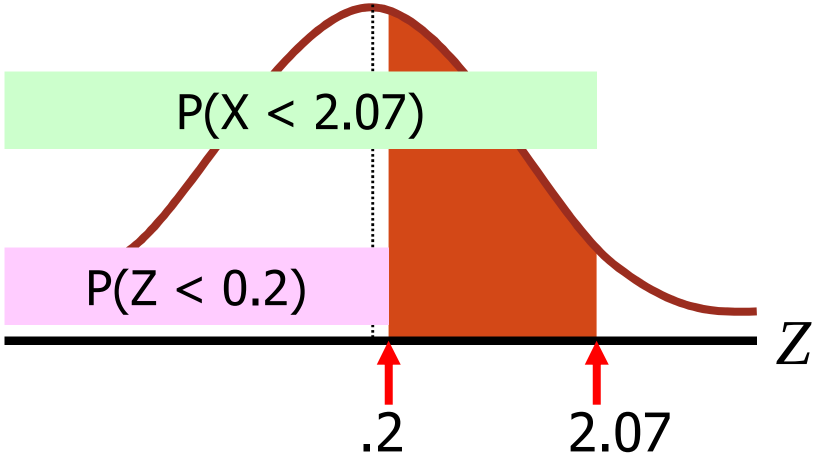
ข. $P(Z \geq 1.25)$ $= 1 - P(Z < 1.25)$

$= 1 - 0.8944$

$= 0.1056$



x	.00	...	.05	...
.0	.5000	...	.5199	...
...				
1.2	.8849	...	.8944	...
...	...	...	...	...

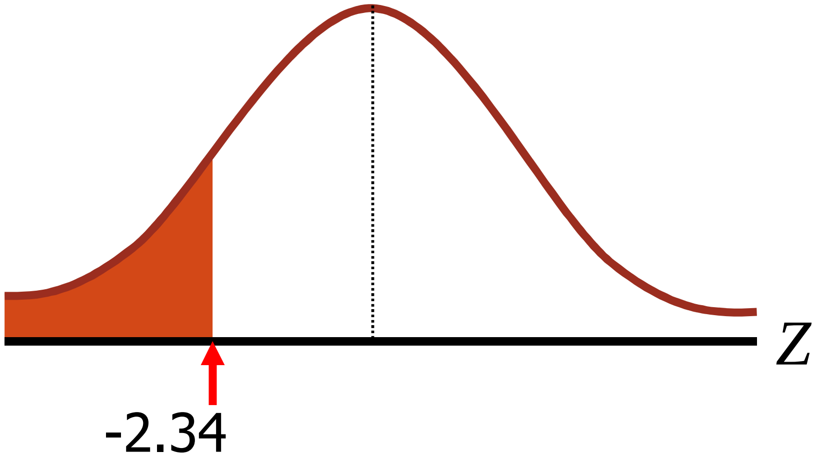


ค. $P(0.2 < Z < 2.07)$

$= P(Z<2.07) - P(Z<0.2)$

$= 0.9808 - 0.5793$

$= 0.4015$

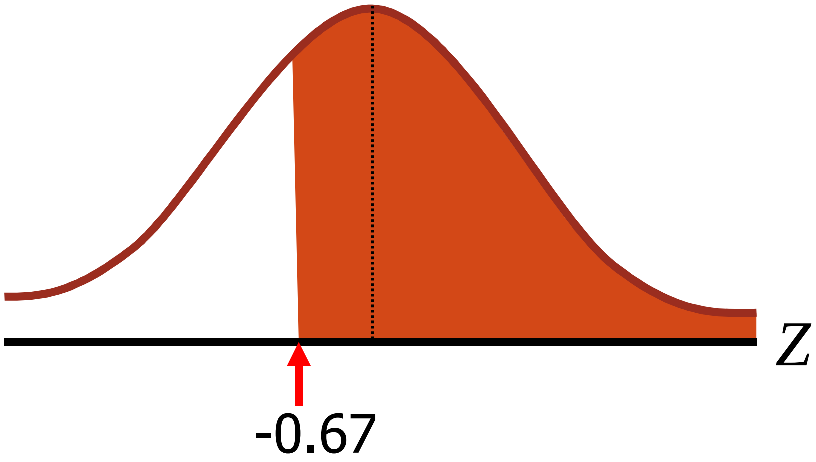


ง. $P(Z < -2.34)$

$= 1 - P(Z < 2.34)$

$= 1 - 0.9904$

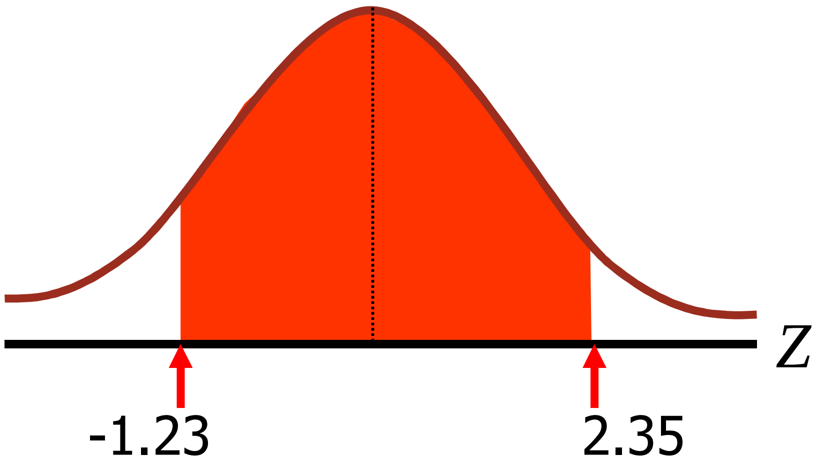
$= 0.0096$



จ. $P(Z \geq -0.67)$

$= P(Z < 0.67)$

$= 0.7486$



ฉ. $P(-1.23 < Z \leq 2.35)$

$= P(Z<2.35) – P(Z<-1.23)$

$= 0.9906 – [1-P(Z<1.23)]$

$= 0.9906 – [1 - 0.8907]$

$= 0.8813$

ตัวอย่างที่ 26

- ในการทดสอบความสามารถทางวิชาการของนักศึกษา จำนวน 800 คน ปรากฏว่าคะแนนทดสอบมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 60 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 คะแนน

  ก. เลือกนักศึกษาอย่างสุ่ม 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นได้คะแนนไม่ต่ำกว่า 50 คะแนน

  ข. มีนักศึกษากี่คนที่ได้คะแนนมากกว่า 42 คะแนน

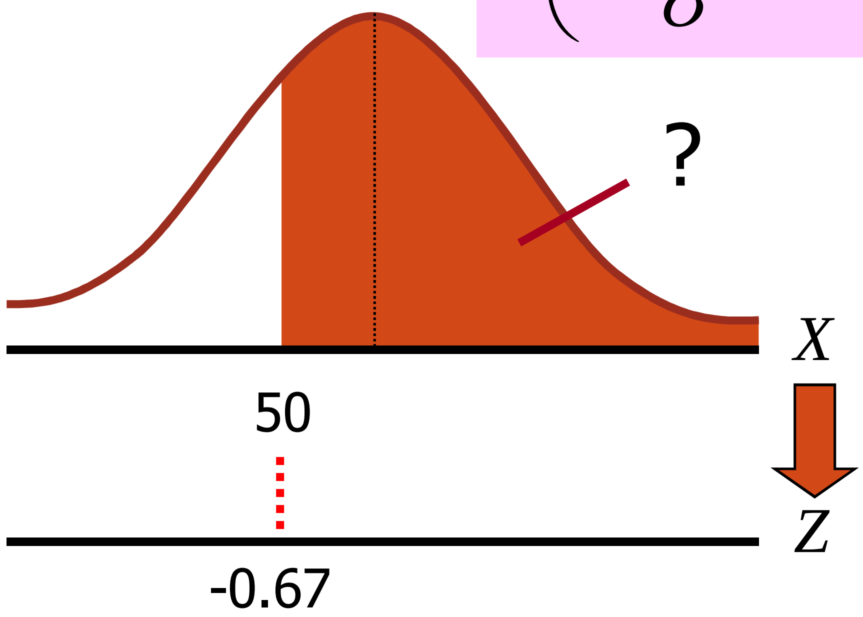
  ค. นส. สุภาพรสอบได้คะแนน 75 คะแนน อยากทราบว่า นส. สุภาพร อยู่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าไร

ตัวอย่างที่ 26

- คะแนนทดสอบ X ~ N(μ = 60, σ = 15)

ก. เลือกนักศึกษาอย่างสุ่ม 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นั้นได้คะแนนไม่ต่ำกว่า 50 คะแนน

$$P(X \geq 50) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{50-60}{15}\right)$$



$= P(Z > -0.67)$

$= P(Z < 0.67)$

$= 0.7486$

ตัวอย่างที่ 26

- คะแนนทดสอบ X ~ N(μ = 60, σ = 15)

ข. มีนักศึกษากี่คนที่ได้คะแนนมากกว่า 42 คะแนน

หากสามารถประมาณโอกาสที่นศ. แต่ละคนจะได้คะแนนมากกว่า 42 คะแนน => P(x > 42)

สามารถคำนวณความถี่คาดหวังที่นศ. จะได้คะแนนมากกว่า 42 คะแนน จากนศ. ทั้งหมด N = 800 => N.P(x > 42)

$$P(X > 42) = P(Z > (42 - 60)/15)$$

$$= P(Z > -1.2) = P(Z < 1.2)$$

$$= 0.8849$$

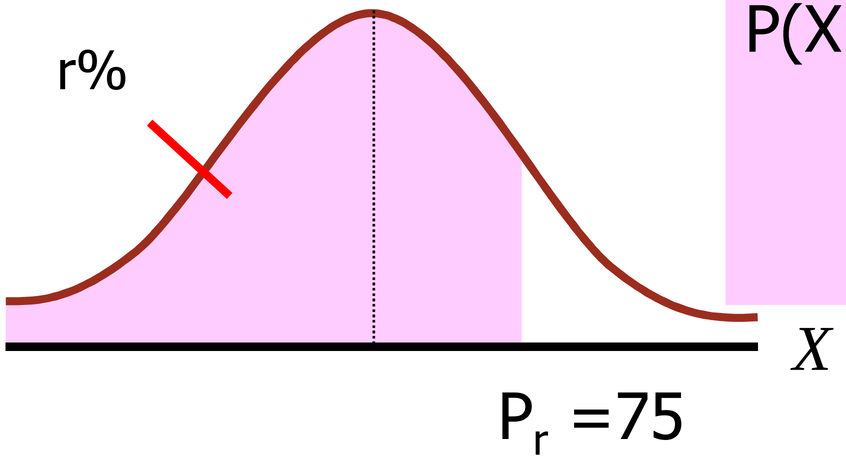
$\Rightarrow$ นศ. ได้คะแนนมากกว่า 42 คะแนน = 800x0.8849 = 70.5 คน

ตัวอย่างที่ 26

- $X \sim N(\mu = 60, \sigma = 15)$

ค. นส. สุภาพรสอบได้คะแนน 75 คะแนน อยากทราบว่า นส. สุภาพร อยู่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าไร

ทบทวน P_r = มีข้อมูลที่มีค่าต่ำกว่า P_r อยู่ r/100 หรือ r%



$$P(X < 75) = P(Z < (75-60)/15)$$
$$= P(Z < 1)$$
$$= 0.8413 = 84.13\%$$

$\Rightarrow r = 84.13$

$P(X<75) = r\%$

ตัวอย่างที่ 27

- น้ำหนักของผงซักฟอกจากบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติด้วยน้ำหนักเฉลี่ยเท่ากับ 7 กก. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.4 กก.

  ก. จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มผงซักฟอกมา 1 กล่อง จะหนักเกิน 6.5 กก.

  ข. ถ้ามีผงซักฟอกจำนวน 25% ของจำนวนทั้งหมดหนักกว่าน้ำหนักที่กำหนดไว้ จงหาน้ำหนักที่ว่านั้น

  ค. ถ้าซื้อผงซักฟอกมา 10 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นจะได้ผงซักฟอกหนักเกิน 7 กก. จำนวน 5 กล่อง

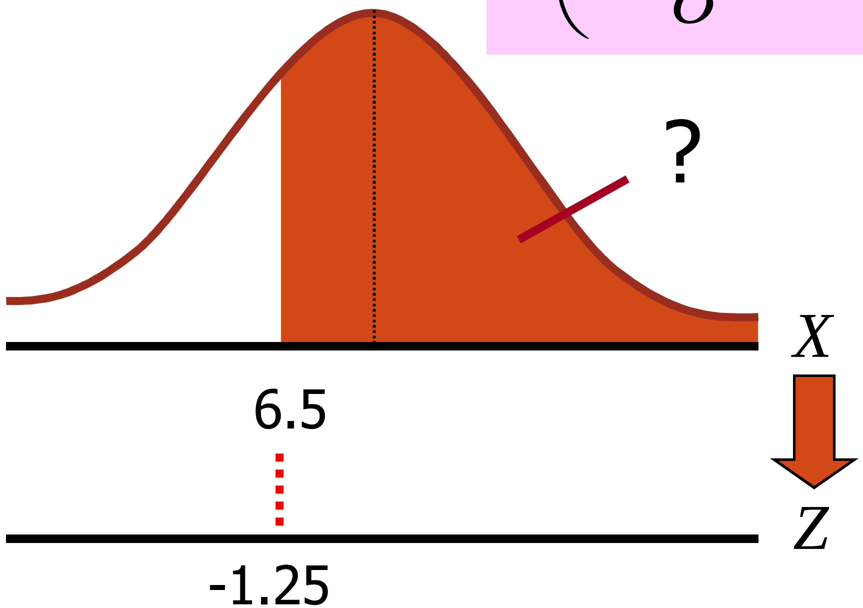
  ง. ถ้าบริษัทผลิตผงซักฟอก 200 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นจะได้ผงซักฟอกน้ำหนักน้อยกว่า 7.93 กก. จำนวน 15 กล่อง

ตัวอย่างที่ 27

- นน.ผงซักฟอก X ~ N(μ = 7, σ = 0.4)

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มผงซักฟอกมา 1 กล่อง จะหนักเกิน 6.5 กก.

$$P(X > 6.5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{6.5-7}{0.4}\right)$$



$= P(Z > -1.25)$

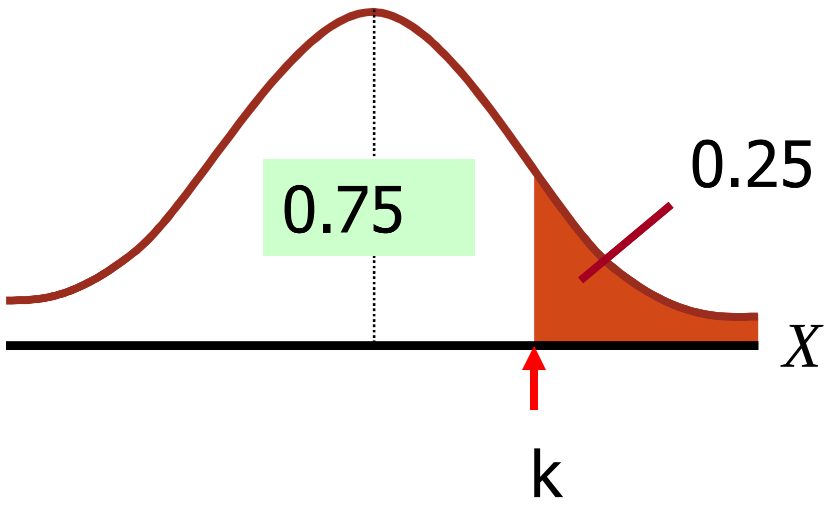
$= P(Z < 1.25)$

$= 0.8944$

ตัวอย่างที่ 27 ▪ นน.ผงซักฟอก X ~ N(μ = 7, σ = 0.4)

ข. ถ้ามีผงซักฟอกจำนวน 25% ของจำนวนทั้งหมดหนักกว่าน้ำหนักที่กำหนดไว้ จงหาน้ำหนักที่ว่านั้น

$\Rightarrow$ หาค่า **k** ซึ่งโอกาสที่ผงซักฟอกจะมีนน.เกินกว่าค่า k อยู่ 25% หรือ 0.25



P(X > k) = 0.25

$\Rightarrow$ P(Z > (k-7)/0.4) = 0.25

$\Rightarrow$ P(Z < (k-7)/0.4) = 0.75

จากตาราง Z พบว่า

P(Z < 0.67) = 0.7486

$\Rightarrow$ (k-7)/0.4 = 0.67

ดังนั้น k = 7.268

ตัวอย่างที่ 27 ▪ นน.ผงซักฟอก X ~ N(μ = 7, σ = 0.4)

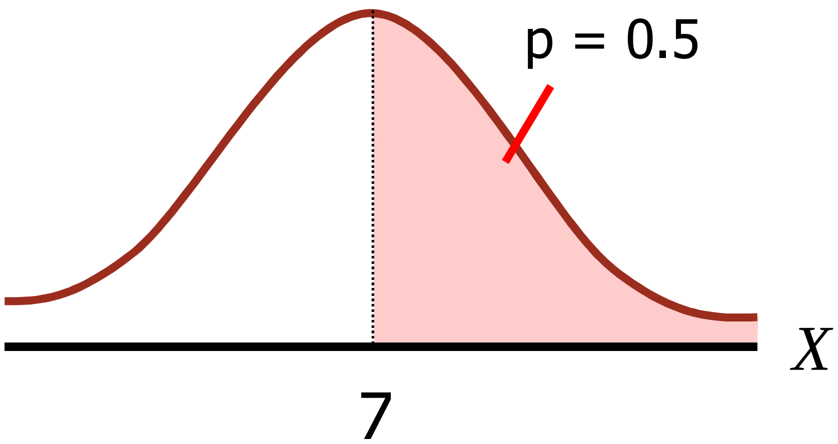
ค. ถ้าซื้อผงซักฟอกมา 10 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นจะได้ผงซักฟอกหนักเกิน 7 กก. จำนวน 5 กล่อง

ตัวแปรสุ่มที่สนใจ :

Y : จำนวนกล่องของผงซักฟอกที่มีนน.เกิน 7 กก.

: 0, 1, 2, 3, ..., 10

Y ~ b(y;n = 10, p = P(x>7))



P(Y = 5) = 0.2461

(ตารางทวินาม)

ตัวอย่างที่ 27

- นน.ผงซักฟอก $X \sim N(\mu = 7, \sigma = 0.4)$

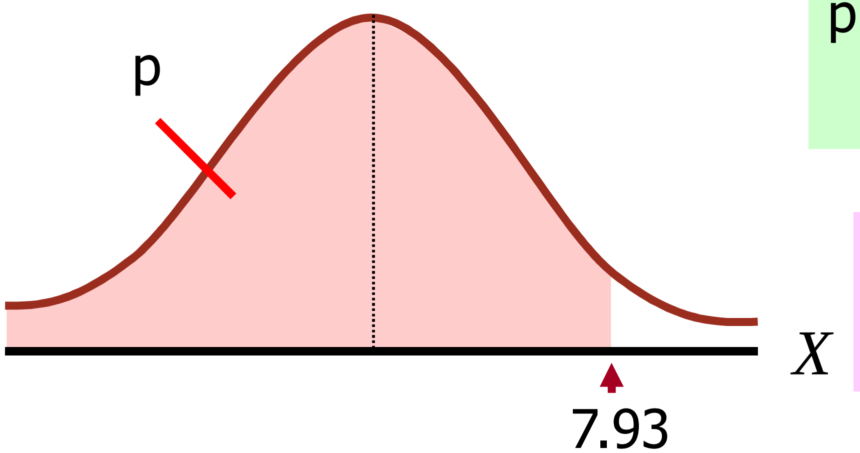
ง. ถ้าบริษัทผลิตผงซักฟอก 200 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นจะได้ผงซักฟอกน้ำหนักน้อยกว่า 7.93 กก. จำนวน 15 กล่อง

ตัวแปรสุ่มที่สนใจ :

Y : จำนวนกล่องของผงซักฟอกที่มีนน.น้อยกว่า 7.93 กก.

: 0, 1, 2, 3, ..., 200

$Y \sim b(y; n = 200, p = P(X<7.93))$



$p = P(X<7.93) = P(Z<(7.93-7)/0.4)$

$= P(Z<2.325) = 0.99$

$P(Y = 15) = {}^{200}C_{15}.(.99)^{15}(.01)^{200-15}$

$= 0$

ตัวอย่างที่ 27 ▪ นน.ผงซักฟอก X ~ N(μ = 7, σ = 0.4)

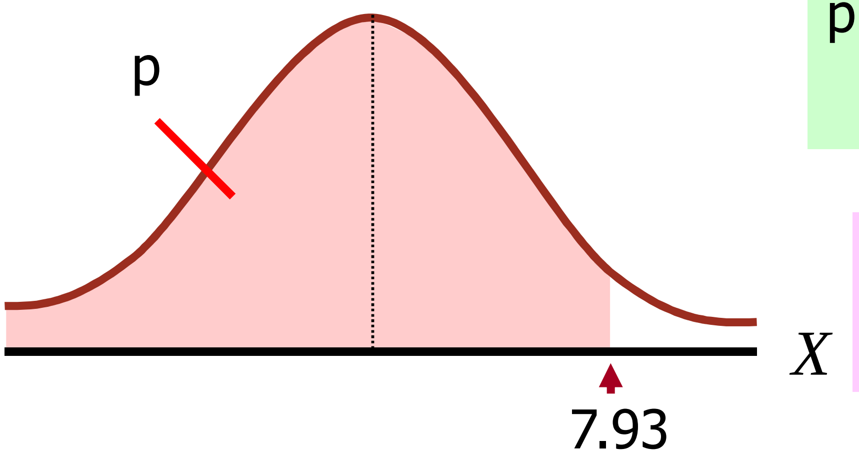
ง. ถ้าบริษัทผลิตผงซักฟอก 200 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นจะได้ผงซักฟอกน้ำหนักน้อยกว่า 7.93 กก. จำนวน 15 กล่อง

ตัวแปรสุ่มที่สนใจ :

Y : จำนวนกล่องของผงซักฟอกที่มีนน.น้อยกว่า 7.93 กก.

: 0, 1, 2, 3, ..., 200

Y ~ b(y;n = 200, p = P(X<7.93))



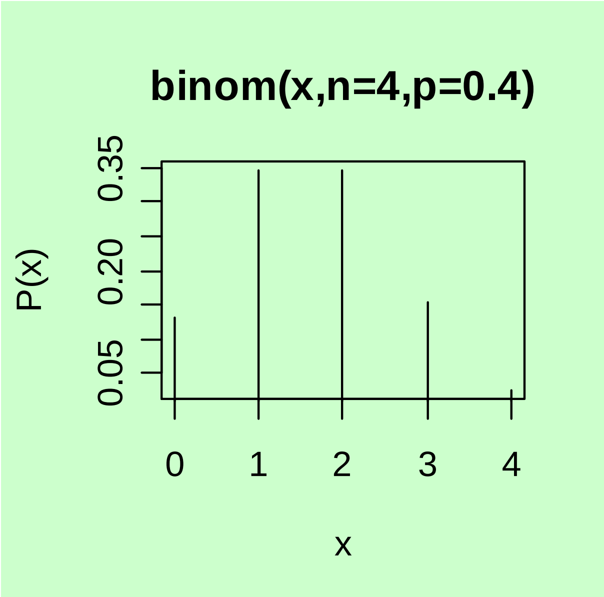
p = P(X<7.93) = P(Z<(7.93-7)/0.4)

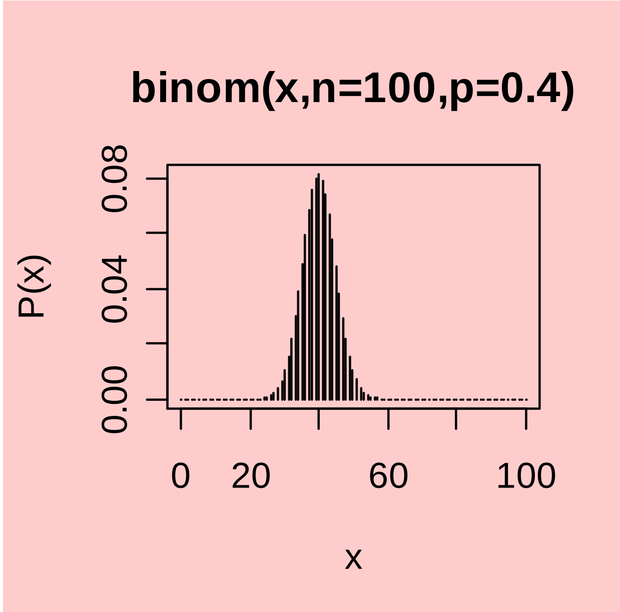
= P(Z<2.325) = 0.99

$P(Y = 15) = {}^{200}C_{15}.(.99)^{15}(.01)^{200-15}$

= 0

การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ



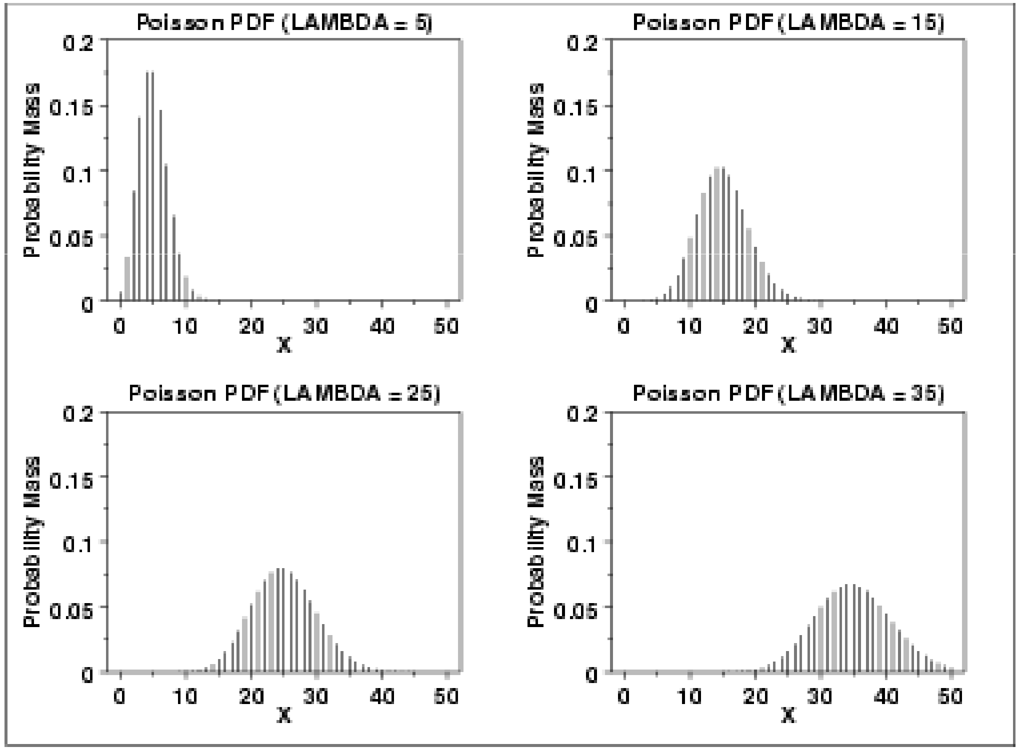


- ถ้า X ~ b(x; n, p) เมื่อ n -> ∞ (n มีขนาดใหญ่) และ p -> 1/2 สามารถประมาณ X ~ N(μ = np, σ^2 = npq)

- เช่น กำหนด X ~ b(x; n=50, p=0.5)
  จงหา P(x = 25)
  เนื่องจาก n มีขนาดใหญ่ และ p = 0.5 จึงประมาณ X ~ N(μ=25, σ^2=12.5)
  ดังนั้น P(x=25) => P(24.5<X<25.5) = P(-0.14<Z<0.14) = 0.1125

การประมาณการแจกแจงปัวซงด้วยการแจกแจงปกติ

- ถ้า $X \sim p(x; \lambda)$
  เมื่อ $\lambda \to \infty$ สามารถประมาณ $X \sim N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$



- เช่น กำหนด $X \sim p(x; \lambda = 50)$
  จงหา $P(x = 55)$

  เนื่องจาก λ มีขนาดใหญ่
  ประมาณ $X \sim N(\mu=50, \sigma^2=50)$
  ดังนั้น
  $P(x=55) \Rightarrow P(54.5<X<55.5)$
  $= P(0.64<Z<0.78)$
  $= 0.0439$